Probabilités conditionnelles et indépendance

1re Mathématiques Fiche de cours

DANS CETTE FICHE

1 L'essentiel du cours 1
2 Exercices types 12
3 À toi de jouer 19
Réponses des devoirs 22

1 L'essentiel du cours

Cette fiche couvre le chapitre de 1re : les événements, l'arbre et le tableau, la probabilité conditionnelle, la formule des probabilités totales, l'indépendance, la succession de deux épreuves indépendantes et les tests (faux positifs). Le tableau ci-dessous dit quelle méthode appliquer selon ce que l'on voit dans l'énoncé.

Ce que je vois, ce que je fais

Ce que je vois	Ce que je fais	Partie
« A ou B », « au moins l'un des deux »	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	1
« ne… pas », « aucun »	je passe au contraire : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	1
des effectifs ou des pourcentages croisés (« $12\,\%$ ont les deux »)	je range tout dans un tableau à double entrée et je complète les cases par différences	2
« si… », « sachant que… », ou « parmi les… » quand on ne regarde qu'une partie de la population (« parmi les cadres », « parmi les malades »)	c'est une probabilité conditionnelle : je la place sur une branche du 2e niveau de l'arbre	2 et 3
je connais les branches et je cherche une intersection	je multiplie le long du chemin	2
je connais une intersection et je cherche une branche	je divise : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$	3
je cherche $P(B)$ et plusieurs chemins mènent à B	probabilités totales : j'additionne les chemins	4
« A et B sont-ils indépendants ? »	je compare $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$	5
deux épreuves qui ne s'influencent pas (deux lancers, deux tirages avec remise)	arbre avec les mêmes branches au 2e niveau ; je multiplie	6
l'arbre donne $P_M(T)$ et on me demande $P_T(M)$	je calcule $P(T)$ par les probabilités totales, puis je divise	7

1. Événements et probabilités

On lance un dé équilibré ; les issues sont 1, 2, 3, 4, 5, 6. L'ensemble de toutes les issues s'appelle l'**univers**. Le dé est équilibré : les six issues ont la même probabilité, on dit qu'elles sont **équiprobables**.

Un **événement** est une partie de l'univers. On note A : « le nombre est impair », c'est-à-dire $\{1;3;5\}$, et B : « le nombre est supérieur ou égal à 3 ». Alors $\bar{A}$ (on lit « A barre », c'est le **contraire** de A) : « le nombre est pair », et $\bar{B}$: « le nombre est inférieur ou égal à 2 ».

$A \cap B$ (« A **et** B ») $= \{3;5\}$; $A \cup B$ (« A **ou** B ») $= \{1;3;4;5;6\}$. Le contraire de $A \cap B$ est $\{1;2;4;6\}$, celui de $A \cup B$ est $\{2\}$.

À RETENIR · LES RÈGLES DE BASE

Si les issues sont équiprobables : $P(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre d'issues}}$, ici $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2. De l'arbre au tableau

F : « j'ai faim » ; R : « je suis en retard ». On sait que $P(F) = 0{,}70$, et que si j'ai faim je suis en retard 9 fois sur 10 : $P_F(R) = 0{,}90$ (on lit « probabilité de R sachant F » : la probabilité d'être en retard quand on sait que j'ai faim). Si je n'ai pas faim : $P_{\bar{F}}(R) = 0{,}75$.

Sur un arbre, les branches du 2e niveau portent des probabilités **conditionnelles**. On obtient la probabilité d'un chemin en **multipliant** les branches :

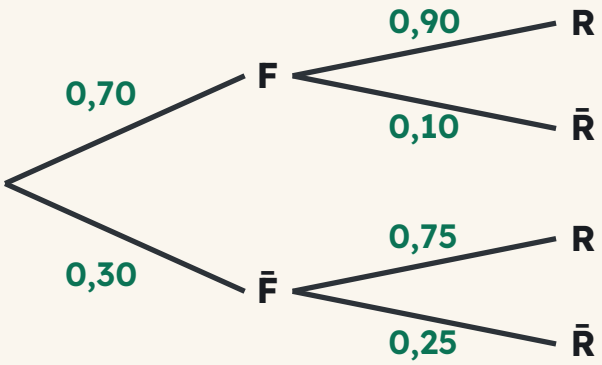
$$P(F \cap R) = P(F) \times P_F(R) = 0{,}70 \times 0{,}90 = 0{,}63$$

À RETENIR · LES BRANCHES D'UN MÊME NŒUD

Les branches qui partent d'un même nœud ont une somme égale à 1. C'est ce qui donne les probabilités qui manquent dans l'énoncé :

$P(\bar{F}) = 1 - 0{,}70$	$P_F(\bar{R}) = 1 - 0{,}90$	$P_{\bar{F}}(\bar{R}) = 1 - 0{,}75$
$P(\bar{F}) = 0{,}30$	$P_F(\bar{R}) = 0{,}10$	$P_{\bar{F}}(\bar{R}) = 0{,}25$

De même $P(F \cap \bar{R}) = 0{,}70 \times 0{,}10 = 0{,}07$, $P(\bar{F} \cap R) = 0{,}30 \times 0{,}75 = 0{,}225$ et $P(\bar{F} \cap \bar{R}) = 0{,}30 \times 0{,}25 = 0{,}075$.



L'arbre de l'exemple

On range ces quatre probabilités d'intersection dans un tableau à double entrée, et on complète les totaux :

	F	$\bar{F}$	Total
R	0,63	0,225	0,855
$\bar{R}$	0,07	0,075	0,145
Total	0,70	0,30	1

3. Du tableau à l'arbre : la probabilité conditionnelle

À RETENIR · LA FORMULE

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \qquad \text{donc} \qquad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$P_A(B)$ se lit « probabilité de B sachant A ». On ne peut diviser par $P(A)$ que si $P(A) \neq 0$: $P_A(B)$ n'a de sens que si A peut se réaliser.

On fait le chemin inverse avec le tableau ci-dessus : $P_F(R) = \dfrac{P(F \cap R)}{P(F)} = \dfrac{0{,}63}{0{,}70} = 0{,}9$; $P_F(\bar{R}) = \dfrac{0{,}07}{0{,}70} = 0{,}1$; $P_{\bar{F}}(R) = \dfrac{0{,}225}{0{,}30} = 0{,}75$; $P_{\bar{F}}(\bar{R}) = \dfrac{0{,}075}{0{,}30} = 0{,}25$. On retrouve exactement l'arbre de départ.

Dans le tableau : des intersections. Sur le 2e niveau de l'arbre : des probabilités conditionnelles. On passe de l'un à l'autre en multipliant ou en divisant par la branche du 1er niveau.

À RETENIR · LES DEUX SENS

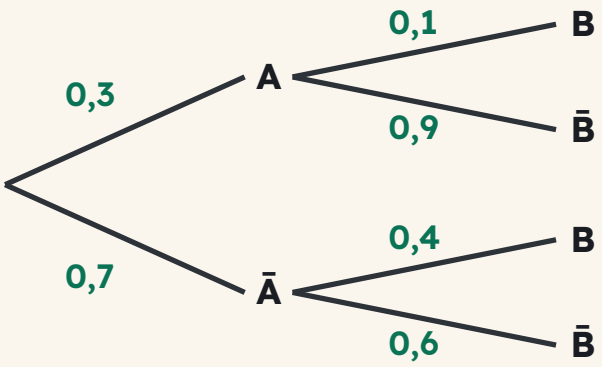
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La première demande $P(A) \neq 0$, la seconde $P(B) \neq 0$.

Et donc, en multipliant : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$.

4. La formule des probabilités totales

On part de cet arbre : $P(A) = 0{,}3$, $P(\bar{A}) = 0{,}7$, $P_A(B) = 0{,}1$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0{,}4$. On cherche $P(B)$.



Deux chemins mènent à B

A et $\bar{A}$ forment une **partition** de l'univers : ils ne se chevauchent pas et, à eux deux, ils couvrent tout. L'événement B est donc coupé en deux morceaux : la partie de B dans A, et la partie de B dans $\bar{A}$.

À RETENIR · PROBABILITÉS TOTALES

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

Plus généralement, si A_1, A_2, A_3, A_4 forment une partition de l'univers :

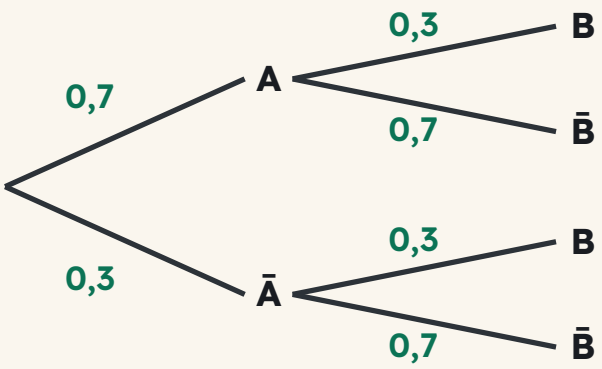
$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + P(A_4 \cap B)$$

Si A_i et B n'ont aucune issue en commun, alors $P(A_i \cap B) = 0$.

Sur l'arbre, on additionne les deux chemins qui mènent à B :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) \\ P(B) &= 0{,}3 \times 0{,}1 + 0{,}7 \times 0{,}4 \\ P(B) &= 0{,}03 + 0{,}28 \\ P(B) &= 0{,}31 \end{aligned}$$

5. L'indépendance



Les deux branches vers B portent la même probabilité

Ici $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B) = 0{,}3$: que A soit réalisé ou non, la probabilité de B ne change pas.

À RETENIR · INDÉPENDANCE

Toujours vrai : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Si et seulement si A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Si $P(A) \neq 0$, cela revient à dire que $P_A(B) = P(B)$: savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B.

Pour montrer que A et B sont indépendants, il faut montrer l'égalité $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Avec les probabilités totales :

$$P(B) = 0{,}7 \times 0{,}3 + 0{,}3 \times 0{,}3$$
$$P(B) = 0{,}21 + 0{,}09$$
$$P(B) = 0{,}3$$

Donc $P(B) = P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)$: A et B sont **indépendants**.

On le vérifie avec la formule de l'encadré « Indépendance », juste au-dessus :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$
$$P(A \cap B) = 0{,}7 \times 0{,}3$$
$$P(A \cap B) = 0{,}21$$

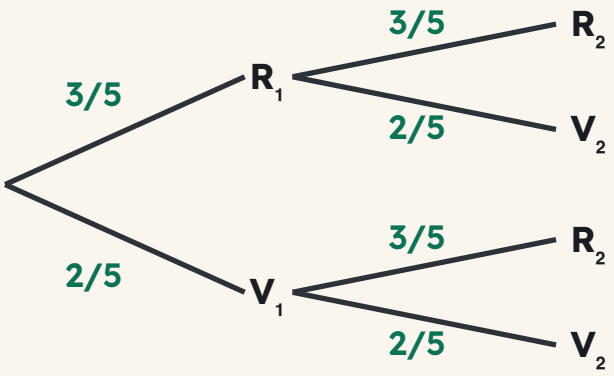
$$P(A) \times P(B) = 0{,}7 \times 0{,}3$$
$$P(A) \times P(B) = 0{,}21$$

Les deux sont égaux : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

6. Deux épreuves indépendantes

Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes. On tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la **remet** dans l'urne, puis on tire une deuxième boule. On note R_1 : « la 1re boule est rouge » et V_1 : « la 1re boule est verte » ; de même R_2 et V_2 pour la 2e boule.

Comme la boule est remise, l'urne est la même au 2e tirage : le résultat du 1er tirage ne change pas les probabilités du 2e. On dit que les deux épreuves sont **indépendantes**. Sur l'arbre, les branches du 2e niveau reprennent les probabilités du 1er niveau : $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{5}$.



Deux tirages avec remise : les mêmes probabilités aux deux niveaux

On multiplie le long de chaque chemin :

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$$
$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{9}{25}$$

De même $P(R_1 \cap V_2) = \frac{6}{25}$, $P(V_1 \cap R_2) = \frac{6}{25}$ et $P(V_1 \cap V_2) = \frac{4}{25}$. On peut aussi ranger ces intersections dans un tableau : chaque case est le produit de la probabilité de sa ligne (1er tirage) par celle de sa colonne (2e tirage).

	$R_2 : \frac{3}{5}$	$V_2 : \frac{2}{5}$	Total
$R_1 : \frac{3}{5}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$
$V_1 : \frac{2}{5}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$
Total	$\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$	$\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$	1

Les quatre cases ont pour somme $\frac{25}{25} = 1$. Soit S : « les deux boules ont la même couleur ». Deux chemins mènent à S : deux rouges, ou deux vertes. On les additionne :

$$P(S) = P(R_1 \cap R_2) + P(V_1 \cap V_2)$$
$$P(S) = \frac{9}{25} + \frac{4}{25}$$
$$P(S) = \frac{13}{25}$$

À RETENIR · DEUX ÉPREUVES INDÉPENDANTES

Quand deux épreuves sont indépendantes (deux lancers de dé, deux tirages avec remise…), les branches du 2e niveau sont les mêmes partout, et la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de chaque épreuve :

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P(R_2)$$

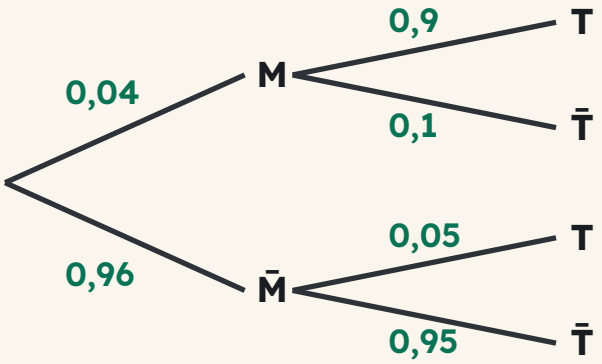
ATTENTION · Sans remise, les tirages ne sont plus indépendants

Si on ne remet pas la 1re boule, l'urne change. Après une rouge, il reste 2 rouges et 2 vertes, donc $P_{R_1}(R_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, et non plus $\frac{3}{5}$. Les branches du 2e niveau ne sont plus les mêmes partout : on revient aux probabilités conditionnelles des parties 2 et 3.

7. Tests et faux positifs

Une maladie touche $4\,\%$ d'une population. Un test de dépistage est positif chez $90\,\%$ des malades, mais aussi chez $5\,\%$ des personnes qui ne sont pas malades : ce sont les **faux positifs**. On choisit une personne au hasard et on note M : « la personne est malade » et T : « le test est positif ».

L'énoncé donne $P(M) = 0{,}04$, $P_M(T) = 0{,}9$ et $P_{\bar{M}}(T) = 0{,}05$. La question que se pose la personne testée est l'inverse : « mon test est positif, quelle est la probabilité que je sois malade ? ». C'est $P_T(M)$.



L'arbre du test : le 1er niveau est la maladie, le 2e le résultat du test

Deux chemins mènent à T : les malades positifs, et les faux positifs.

$$P(M \cap T) = 0{,}04 \times 0{,}9 \qquad P(\bar{M} \cap T) = 0{,}96 \times 0{,}05$$
$$P(M \cap T) = 0{,}036 \qquad P(\bar{M} \cap T) = 0{,}048$$

Avec les probabilités totales :

$$P(T) = 0{,}036 + 0{,}048$$
$$P(T) = 0{,}084$$

Puis on divise :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$
$$P_T(M) = \frac{0{,}036}{0{,}084}$$
$$P_T(M) = \frac{36}{84}$$
$$P_T(M) = \frac{3}{7}$$
$$P_T(M) \approx 0{,}43$$

Le test est positif chez $90\,\%$ des malades, et pourtant une personne dont le test est positif n'a qu'environ $43\,\%$ de chances d'être malade. La maladie est rare : les faux positifs, pris sur les $96\,\%$ de personnes non malades, sont plus nombreux que les malades positifs ($0{,}048$ contre $0{,}036$).

À RETENIR · INVERSER LA CONDITION

L'arbre donne $P_M(T)$. Pour obtenir $P_T(M)$, on calcule $P(T)$ avec les probabilités totales, puis on divise :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$

$P_M(T)$ et $P_T(M)$ n'ont en général pas la même valeur : on lit toujours ce qui est écrit après « sachant ».

8. Les pièges à éviter

ATTENTION · Quatre erreurs qui reviennent

1. Enlever les virgules d'une fraction. $\frac{0{,}12}{0{,}5}$ n'est pas $\frac{12}{5}$. On multiplie en haut **et** en bas par le même nombre :

$$\frac{0{,}12 \times 100}{0{,}5 \times 100} = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}$$

Contrôle : une probabilité ne dépasse jamais 1, et $\frac{12}{5} = 2{,}4$.

2. Un effectif n'est pas une probabilité. Dans une classe de 30 élèves, 12 sont concernés, et on choisit un élève au hasard. 12 est un nombre d'élèves ; la probabilité, c'est $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$. Et quand l'énoncé demande une fraction irréductible, on simplifie jusqu'au bout : avec 9 élèves concernés sur les 30, on n'écrit pas $\frac{9}{30}$ mais $\frac{3}{10}$.

3. Multiplier $P(A)$ par $P(B)$. Ce qui est toujours vrai, c'est $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. Le produit $P(A) \times P(B)$ ne donne $P(A \cap B)$ que si A et B sont indépendants : tant qu'on ne le sait pas, on n'a pas le droit de l'écrire.

4. Une intersection sur une branche. Sur le 2e niveau d'un arbre, on écrit des probabilités conditionnelles, pas des intersections. Si $P(A) = 0{,}6$ et $P(A \cap B) = 0{,}42$, la branche de A vers B ne porte pas $0{,}42$: elle porte $P_A(B) = \frac{0{,}42}{0{,}6} = \frac{7}{10}$. Le $0{,}42$, lui, va dans le tableau.

2 Exercices types

La médiathèque TABLEAU D'EFFECTIFS, RÉUNION, CONDITIONNELLE DANS LES DEUX SENS

Un samedi, une médiathèque a prêté 400 documents : 260 livres, les autres étant des DVD. Parmi ces 400 documents, 150 sont des documents jeunesse, dont 110 livres. Les documents qui ne sont pas jeunesse sont des documents pour adultes. On choisit au hasard la fiche d'un des 400 prêts. On note L : « le document est un livre » et J : « le document est un document jeunesse ». Les probabilités seront données sous forme de fraction irréductible.

1. Dresser le tableau d'effectifs (colonnes L, $\bar{L}$, Total ; lignes J, $\bar{J}$, Total).

2. Calculer $P(L)$, $P(J)$ et $P(L \cap J)$.

3. Calculer la probabilité que le document soit un livre ou un document jeunesse.

4. En déduire la probabilité que le document soit un DVD pour adultes.

5. Le document est un livre. Quelle est la probabilité que ce soit un document jeunesse ?

6. Le document est un document jeunesse. Quelle est la probabilité que ce soit un livre ?

CORRECTION

1.

On place les nombres de l'énoncé (400, 260, 150, 110), puis on complète par différences : $400 - 260 = 140$ DVD ; $260 - 110 = 150$ livres pour adultes ; $150 - 110 = 40$ DVD jeunesse ; $400 - 150 = 250$ documents pour adultes ; $140 - 40 = 100$ DVD pour adultes. Contrôle : $150 + 100 = 250$.

	L	$\bar{L}$	Total
J	110	40	150
$\bar{J}$	150	100	250
Total	260	140	400

2.

La fiche est choisie au hasard parmi 400 : les issues sont équiprobables.

$$P(L) = \frac{260}{400}$$
$$P(L) = \frac{13}{20} \quad \text{(on simplifie par 20)}$$

$$P(J) = \frac{150}{400}$$
$$P(J) = \frac{3}{8} \quad \text{(on simplifie par 50)}$$

$$P(L \cap J) = \frac{110}{400}$$
$$P(L \cap J) = \frac{11}{40} \quad \text{(on simplifie par 10)}$$

3.

« Livre **ou** jeunesse », c'est $L \cup J$:

$$P(L \cup J) = P(L) + P(J) - P(L \cap J)$$
$$P(L \cup J) = \frac{260}{400} + \frac{150}{400} - \frac{110}{400}$$
$$P(L \cup J) = \frac{300}{400}$$
$$P(L \cup J) = \frac{3}{4}$$

4.

Un DVD pour adultes n'est ni un livre ni un document jeunesse : c'est $\bar{L} \cap \bar{J}$, le contraire de $L \cup J$.

$$P(\bar{L} \cap \bar{J}) = 1 - P(L \cup J)$$
$$P(\bar{L} \cap \bar{J}) = 1 - \frac{3}{4}$$
$$P(\bar{L} \cap \bar{J}) = \frac{1}{4}$$

Le tableau le confirme : $\frac{100}{400} = \frac{1}{4}$.

5.

On cherche $P_L(J)$:

$$P_L(J) = \frac{P(L \cap J)}{P(L)}$$
$$P_L(J) = \frac{110/400}{260/400}$$
$$P_L(J) = \frac{110}{260}$$
$$P_L(J) = \frac{11}{26}$$

Les 400 se simplifient : on lit directement 110 livres jeunesse parmi les 260 livres.

6.

On cherche $P_J(L)$: 110 livres parmi les 150 documents jeunesse.

$$P_J(L) = \frac{110}{150}$$
$$P_J(L) = \frac{11}{15}$$

$P(L) = \frac{13}{20}$; $P(J) = \frac{3}{8}$; $P(L \cap J) = \frac{11}{40}$; $P(L \cup J) = \frac{3}{4}$; $P(\bar{L} \cap \bar{J}) = \frac{1}{4}$; $P_L(J) = \frac{11}{26}$; $P_J(L) = \frac{11}{15}$

Les questions 5 et 6 n'ont pas la même réponse : on ne divise pas par le même total.

Pair et petit MONTRER UNE INDÉPENDANCE

On lance un dé équilibré à six faces. On note E : « le nombre est pair », G : « le nombre est inférieur ou égal à 4 » et H : « le nombre est supérieur ou égal à 4 ».

1. Écrire la liste des issues de E, G, H, $E \cap G$ et $E \cap H$.

2. Les événements E et G sont-ils indépendants ?

3. Les événements E et H sont-ils indépendants ?

CORRECTION

1.

$E = \{2; 4; 6\}$; $G = \{1; 2; 3; 4\}$; $H = \{4; 5; 6\}$; $E \cap G = \{2; 4\}$; $E \cap H = \{4; 6\}$.

2.

Le dé est équilibré, les six issues sont équiprobables :

$$P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(G) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad P(E \cap G) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

On compare $P(E \cap G)$ et $P(E) \times P(G)$:

$$P(E) \times P(G) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$$
$$P(E) \times P(G) = \frac{2}{6}$$
$$P(E) \times P(G) = \frac{1}{3}$$

On a $P(E \cap G) = P(E) \times P(G)$: E et G sont **indépendants**.

Contrôle avec le critère $P_G(E) = P(E)$: parmi 1, 2, 3, 4, deux nombres sont pairs, donc $P_G(E) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, comme sur le dé entier.

3.

$P(H) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $P(E \cap H) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$$P(E) \times P(H) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$
$$P(E) \times P(H) = \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{3} \neq \frac{1}{4}$: E et H ne sont **pas** indépendants. Parmi 4, 5, 6, deux nombres sur trois sont pairs : savoir que H est réalisé fait passer la probabilité d'avoir un nombre pair de $\frac{1}{2}$ à $\frac{2}{3}$.

E et G indépendants ; E et H non indépendants

Le trajet de Lina ARBRE, PROBABILITÉS TOTALES, INVERSER LA CONDITION

Le matin, Lina va au lycée à vélo dans $75\,\%$ des cas, et en bus sinon. Quand elle prend le vélo, elle arrive en avance dans $60\,\%$ des cas ; quand elle prend le bus, dans $20\,\%$ des cas seulement. On choisit un matin au hasard. On note V : « Lina prend le vélo » et E : « Lina arrive en avance ».

1. Construire un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que Lina prenne le vélo et arrive en avance.

3. Montrer que $P(E) = 0{,}5$.

4. Ce matin, Lina est arrivée en avance. Quelle est la probabilité qu'elle soit venue à vélo ?

5. Les événements V et E sont-ils indépendants ?

CORRECTION

1.

« Quand elle prend le vélo… » : ce sont des probabilités conditionnelles, sur le 2e niveau. Premier niveau : V avec $0{,}75$ et $\bar{V}$ (le bus) avec $1 - 0{,}75 = 0{,}25$. Après V : E avec $0{,}6$ et $\bar{E}$ avec $0{,}4$. Après $\bar{V}$: E avec $0{,}2$ et $\bar{E}$ avec $0{,}8$.

2.

On multiplie le long du chemin V puis E :

$$P(V \cap E) = P(V) \times P_V(E)$$
$$P(V \cap E) = 0{,}75 \times 0{,}6$$
$$P(V \cap E) = 0{,}45$$

3.

Deux chemins mènent à E. Avec les probabilités totales :

$$P(E) = P(V) \times P_V(E) + P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(E)$$
$$P(E) = 0{,}45 + 0{,}25 \times 0{,}2$$
$$P(E) = 0{,}45 + 0{,}05$$
$$P(E) = 0{,}5$$

4.

On cherche $P_E(V)$: la condition est cette fois « en avance ».

$$P_E(V) = \frac{P(V \cap E)}{P(E)}$$
$$P_E(V) = \frac{0{,}45}{0{,}5}$$
$$P_E(V) = 0{,}9$$

5.

On compare $P(V \cap E)$ et $P(V) \times P(E)$:

$$P(V) \times P(E) = 0{,}75 \times 0{,}5$$
$$P(V) \times P(E) = 0{,}375$$

$P(V \cap E) = 0{,}45$ et $0{,}45 \neq 0{,}375$: V et E ne sont **pas** indépendants. Savoir que Lina prend le vélo fait passer la probabilité d'arriver en avance de $0{,}5$ à $0{,}6$.

$P(V \cap E) = 0{,}45$; $P(E) = 0{,}5$; $P_E(V) = 0{,}9$; V **et** E **non indépendants**

$P_V(E) = 0{,}6$ mais $P_E(V) = 0{,}9$: ce n'est pas la même probabilité.

Deux lancers de dé DEUX ÉPREUVES INDÉPENDANTES

Nour lance deux fois de suite un dé équilibré à six faces. Elle regarde seulement si elle obtient un 6 ou non. On note S_1 : « le 1er lancer donne 6 » et S_2 : « le 2e lancer donne 6 ».

1. Expliquer pourquoi les deux lancers sont des épreuves indépendantes, puis construire l'arbre.

2. Calculer la probabilité d'obtenir deux 6.

3. Calculer la probabilité de n'obtenir aucun 6.

4. En déduire la probabilité d'obtenir au moins un 6.

5. Calculer la probabilité d'obtenir exactement un 6.

CORRECTION

1.

Le dé est le même à chaque lancer : le résultat du 1er lancer ne change pas les probabilités du 2e. Les deux épreuves sont indépendantes. Arbre : au 1er niveau, S_1 avec $\frac{1}{6}$ et $\bar{S}_1$ avec $\frac{5}{6}$; au 2e niveau, après chacun d'eux, S_2 avec $\frac{1}{6}$ et $\bar{S}_2$ avec $\frac{5}{6}$.

2.

$$P(S_1 \cap S_2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$
$$P(S_1 \cap S_2) = \frac{1}{36}$$

3.

« Aucun 6 », c'est $\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$:

$$P(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$$
$$P(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2) = \frac{25}{36}$$

4.

« Au moins un 6 » est le contraire de « aucun 6 » :

$$P(\text{au moins un } 6) = 1 - \frac{25}{36}$$
$$P(\text{au moins un } 6) = \frac{11}{36}$$

5.

Deux chemins donnent exactement un 6 : $S_1 \cap \bar{S}_2$ et $\bar{S}_1 \cap S_2$. On les additionne :

$$P(\text{exactement un } 6) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$$
$$P(\text{exactement un } 6) = \frac{5}{36} + \frac{5}{36}$$
$$P(\text{exactement un } 6) = \frac{10}{36}$$
$$P(\text{exactement un } 6) = \frac{5}{18}$$

Contrôle : $\frac{1}{36} + \frac{10}{36} + \frac{25}{36} = \frac{36}{36} = 1$, et « au moins un 6 » $= \frac{1}{36} + \frac{10}{36} = \frac{11}{36}$.

$\frac{1}{36}$; $\frac{25}{36}$; $\frac{11}{36}$; $\frac{5}{18}$

« Au moins un 6 » ne vaut pas $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{12}{36}$: cette somme compte deux fois le chemin « deux 6 ».

Les cadres en voiture RETROUVER UNE BRANCHE, ISOLER UNE PROBABILITÉ

Dans une entreprise, $20\,\%$ des salariés sont cadres. $70\,\%$ des cadres viennent travailler en voiture. Au total, $38\,\%$ des salariés viennent en voiture. On choisit un salarié au hasard. On note C : « le salarié est cadre » et V : « le salarié vient en voiture ». On note $x = P_{\bar{C}}(V)$: c'est la probabilité qu'un salarié qui n'est pas cadre vienne en voiture.

1. Construire l'arbre pondéré, en plaçant x sur la bonne branche.

2. Calculer $P(C \cap V)$.

3. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que $x = 0{,}3$.

4. Un salarié vient en voiture. Quelle est la probabilité qu'il soit cadre ? Donner la fraction irréductible, puis l'arrondi au centième.

CORRECTION

1.

Premier niveau : C avec $0{,}2$ et $\bar{C}$ avec $0{,}8$. Après C : V avec $0{,}7$ et $\bar{V}$ avec $0{,}3$. Après $\bar{C}$: V avec x et $\bar{V}$ avec $1 - x$. Le $38\,\%$ ne va sur aucune branche : c'est $P(V)$, la somme de deux chemins.

2.

$$P(C \cap V) = 0{,}2 \times 0{,}7$$
$$P(C \cap V) = 0{,}14$$

3.

Deux chemins mènent à V :

$$P(V) = P(C \cap V) + P(\bar{C} \cap V)$$
$$0{,}38 = 0{,}14 + 0{,}8 \times x$$

On enlève $0{,}14$ des deux côtés, puis, comme x est multiplié par $0{,}8$, on divise les deux côtés par $0{,}8$:

$$0{,}24 = 0{,}8 \times x$$
$$x = \frac{0{,}24}{0{,}8}$$
$$x = \frac{24}{80}$$
$$x = 0{,}3$$

Contrôle : $0{,}14 + 0{,}8 \times 0{,}3 = 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}38$.

4.

On cherche $P_V(C)$:

$$P_V(C) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)}$$
$$P_V(C) = \frac{0{,}14}{0{,}38}$$
$$P_V(C) = \frac{14}{38}$$
$$P_V(C) = \frac{7}{19}$$
$$P_V(C) \approx 0{,}37$$

$P(C \cap V) = 0{,}14$; $x = 0{,}3$; $P_V(C) = \frac{7}{19} \approx 0{,}37$

3 À toi de jouer

Cinq exercices à chercher seul. Les réponses sont en fin de fiche : on cherche d'abord, on vérifie ensuite.

Les réponses sont à la fin de la fiche, dans « Réponses des devoirs ». Cherche d'abord, vérifie ensuite.

1. Dans une ville, $55\,\%$ des habitants possèdent un vélo, $30\,\%$ possèdent une voiture et $12\,\%$ possèdent les deux. On choisit un habitant au hasard. On note V : « l'habitant possède un vélo » et C : « l'habitant possède une voiture ».

1. Recopier et compléter le tableau de probabilités :

	V	$\bar{V}$	Total
C	$0{,}12$		$0{,}30$
$\bar{C}$			
Total	$0{,}55$		1

2. Calculer la probabilité que l'habitant possède un vélo ou une voiture.

3. Calculer la probabilité qu'il ne possède ni vélo ni voiture.

4. L'habitant possède une voiture. Quelle est la probabilité qu'il possède aussi un vélo ?

5. Les événements V et C sont-ils indépendants ?

2. Un dimanche, un cinéma a accueilli 200 spectateurs. Chacun a vu un film en 3D ou en 2D, et a payé un tarif réduit ou le plein tarif. Le tableau donne les effectifs. On choisit un spectateur au hasard. On note D : « le spectateur a vu un film en 3D » et R : « le spectateur a payé un tarif réduit ». Les probabilités seront données sous forme de fraction irréductible.

	D (3D)	$\bar{D}$ (2D)	Total
R (tarif réduit)	20	45	65
$\bar{R}$ (plein tarif)	30	105	135
Total	50	150	200

1. Calculer $P(D)$, puis $P_D(R)$ et $P_{\bar{D}}(R)$.

2. Construire l'arbre pondéré : au 1er niveau, le film (3D ou 2D) ; au 2e niveau, le tarif.

3. Calculer $P(D \cap R)$ avec l'arbre, puis vérifier le résultat avec le tableau.

4. Un spectateur a payé un tarif réduit. Quelle est la probabilité qu'il ait vu un film en 3D ?

3. Un sac contient 4 jetons bleus et 1 jeton jaune. On tire un jeton au hasard, on note sa couleur, on le remet dans le sac, puis on tire un deuxième jeton.

1. Pourquoi les deux tirages sont-ils indépendants ? Construire l'arbre.

2. Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons bleus.

3. En déduire la probabilité d'obtenir au moins un jeton jaune.

4. Calculer la probabilité d'obtenir exactement un jeton jaune.

5. On recommence, mais cette fois sans remettre le premier jeton dans le sac. Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons bleus.

4. A et B sont deux événements tels que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}3$.

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2. Calculer $P_A(B)$. Que remarque-t-on ?

3. Calculer $P(A \cup B)$.

4. Calculer $P(\bar{A} \cap B)$, puis $P(\bar{A}) \times P(B)$. Que peut-on dire de $\bar{A}$ et B ?

5. Dans une usine, $5\,\%$ des pièces fabriquées ont un défaut. Une machine de contrôle rejette $95\,\%$ des pièces qui ont un défaut, mais aussi $4\,\%$ des pièces sans défaut. On choisit une pièce au hasard. On note D : « la pièce a un défaut » et R : « la pièce est rejetée ».

1. Construire un arbre pondéré.

2. Montrer que $P(R) = 0{,}0855$.

3. Une pièce est rejetée. Quelle est la probabilité qu'elle ait vraiment un défaut ? Donner la fraction irréductible, puis l'arrondi au centième.

4. Parmi les pièces rejetées, quelle est la proportion de pièces sans défaut ?

Réponses des devoirs

À ne regarder qu'après avoir cherché, et à comparer avec ta rédaction : la réponse seule ne suffit pas en contrôle, c'est la justification qui compte.

Réponses des exercices de « À toi de jouer ».

1. 1. Ligne C : $0{,}12$; $0{,}18$; $0{,}30$. Ligne $\bar{C}$: $0{,}43$; $0{,}27$; $0{,}70$. Ligne Total : $0{,}55$; $0{,}45$; 1. 2. $P(V \cup C) = 0{,}55 + 0{,}30 - 0{,}12 = 0{,}73$. 3. $1 - 0{,}73 = 0{,}27$ (c'est la case $\bar{V} \cap \bar{C}$). 4. $P_C(V) = \dfrac{0{,}12}{0{,}30} = 0{,}4$. 5. Non : $P(V) \times P(C) = 0{,}55 \times 0{,}30 = 0{,}165$, alors que $P(V \cap C) = 0{,}12$.

2. 1. $P(D) = \dfrac{50}{200} = \dfrac{1}{4}$; $P_D(R) = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5}$ (20 tarifs réduits parmi les 50 spectateurs de la 3D) ; $P_{\bar{D}}(R) = \dfrac{45}{150} = \dfrac{3}{10}$. 2. Premier niveau : D ($\frac{1}{4}$), $\bar{D}$ ($\frac{3}{4}$). Après D : R ($\frac{2}{5}$), $\bar{R}$ ($\frac{3}{5}$). Après $\bar{D}$: R ($\frac{3}{10}$), $\bar{R}$ ($\frac{7}{10}$). 3. $P(D \cap R) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$; dans le tableau, $\dfrac{20}{200} = \dfrac{1}{10}$. 4. $P_R(D) = \dfrac{20}{65} = \dfrac{4}{13}$ (20 spectateurs de la 3D parmi les 65 tarifs réduits).

3. 1. Le jeton est remis : le sac est le même au 2e tirage, les probabilités ne changent pas. Arbre : bleu $\frac{4}{5}$, jaune $\frac{1}{5}$ aux deux niveaux. 2. $\dfrac{4}{5} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{16}{25}$. 3. $1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25}$. 4. $\dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{25}$. 5. Après un bleu, il reste 3 bleus sur 4 jetons : $\dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$.

4. 1. Oui : $P(A) \times P(B) = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3 = P(A \cap B)$. 2. $P_A(B) = \dfrac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5$: c'est $P(B)$, comme le veut l'indépendance. 3. $P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}8$. 4. $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$ et $P(\bar{A}) \times P(B) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2$: $\bar{A}$ et B sont aussi indépendants.

5. 1. Premier niveau : D ($0{,}05$), $\bar{D}$ ($0{,}95$). Après D : R ($0{,}95$), $\bar{R}$ ($0{,}05$). Après $\bar{D}$: R ($0{,}04$), $\bar{R}$ ($0{,}96$). 2. $P(R) = 0{,}05 \times 0{,}95 + 0{,}95 \times 0{,}04 = 0{,}0475 + 0{,}038 = 0{,}0855$. 3. $P_R(D) = \dfrac{0{,}0475}{0{,}0855} = \dfrac{475}{855} = \dfrac{5}{9} \approx 0{,}56$. 4. $P_R(\bar{D}) = 1 - \dfrac{5}{9} = \dfrac{4}{9} \approx 0{,}44$: un peu moins de la moitié des pièces rejetées sont bonnes.