



Lire une parabole : forme canonique, courbe et racines

1re générale — spécialité mathématiques

Mathématiques

Fiche de cours

DANS CETTE FICHE

1	Tout ce qu'il te faut	1
2	Six courbes, lues une par une	10
3	À toi de jouer	18
	Réponses des devoirs	22

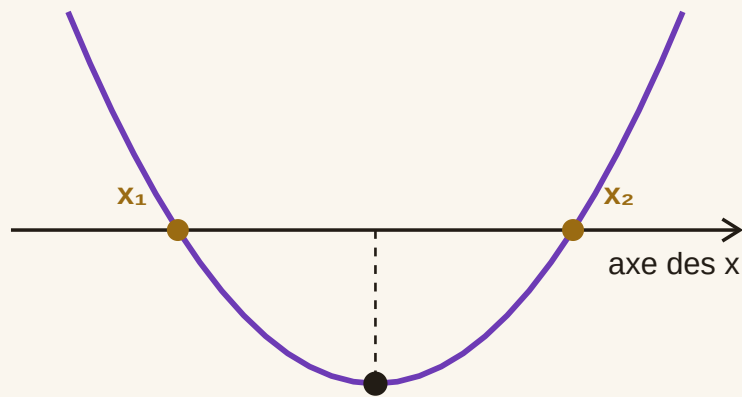
1 Tout ce qu'il te faut

Une **parabole** est la courbe d'une fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sur une parabole, on se pose toujours les mêmes trois questions :

- **Où est son point le plus haut ou le plus bas ?** C'est le **sommet** $S(\alpha ; \beta)$: il donne le **minimum** ou le **maximum** de f .
- **Où coupe-t-elle l'axe des abscisses ?** Ce sont les **racines** : les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$ (on dit aussi les *solutions de $f(x) = 0$* , ou les *zéros de f*). Sur le dessin, ce sont les points où la courbe traverse l'axe.
- **Quelle est son allure ?** Tournée vers le haut ou vers le bas, sommet à droite ou à gauche.

Pourquoi chercher les racines ? Pour savoir **quand la fonction s'annule** : à quel moment un ballon lancé touche le sol, pour quelle production un bénéfice est nul... Elles servent aussi à factoriser et à étudier le signe de f .

Chaque écriture de f répond à l'une de ces questions. Cette fiche t'apprend à choisir la bonne, et à passer de l'une à l'autre. Elle se suffit à elle-même : les rappels dont tu as besoin sont écrits ci-dessous, tu n'as rien d'autre à ressortir.



sommet $S(\alpha ; \beta)$

le point le plus bas : le minimum de f

x_1 et x_2 : les racines, là où la courbe coupe l'axe

À RETENIR · QUELLE ÉCRITURE POUR QUELLE QUESTION ?

Ta question	L'écriture à utiliser	Ce que tu utilises
Où est le sommet ? Quel est le minimum ou le maximum ?	la canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$	$S(\alpha ; \beta)$
Où la courbe coupe-t-elle l'axe ? Quelles sont les racines ?	la développée $ax^2 + bx + c$	Δ , puis les formules des racines
Je veux voir les racines directement	la factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$	x_1 et x_2 (partie 5)
Combien de racines, sans calculer ?	la canonique	le signe de a et de β
J'ai une écriture et il me faut l'autre	les deux	les parties 2 et 3

1. Les trois écritures d'une même fonction

À RETENIR · DÉVELOPPÉE, CANONIQUE ET FACTORISÉE

Une fonction polynôme du second degré s'écrit de **trois façons**.

La forme développée :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a \neq 0$$

La forme canonique :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

C'est le **même** a dans les deux. Et :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \beta = f(\alpha)$$

La forme factorisée, qui n'existe que si $\Delta \geq 0$ (c'est-à-dire s'il y a des racines) :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

avec x_1 et x_2 les racines, et toujours le même a . Si $\Delta = 0$, il n'y a qu'une racine : $f(x) = a(x - x_0)^2$.

Chacune sert à quelque chose de différent : la développée donne a, b, c — donc Δ et les racines. La canonique donne le sommet et l'allure de la courbe. La factorisée montre directement les racines.

2. Passer de la canonique à la développée

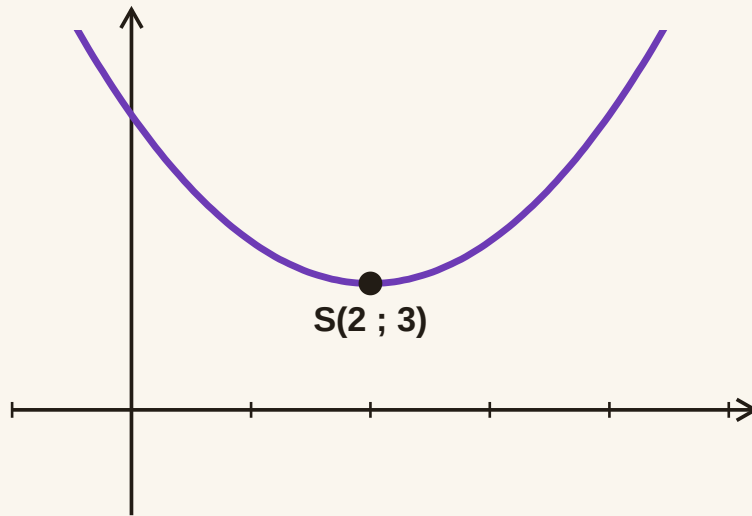
Quand l'utiliser : on te donne la forme canonique (donc le sommet) et il te faut la forme développée, pour calculer Δ ou chercher les racines.

On développe le carré, puis on distribue le a . Exemple avec $f(x) = (x - 2)^2 + 3$:

$$(x - 2)^2 + 3 = x^2 - 4x + 4 + 3$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 7$$

donc $a = 1, b = -4, c = 7$.



L'endroit où l'on se trompe, c'est toujours le **double produit**. Dans $(x - \alpha)^2$ il vaut $2 \times x \times \alpha$, et c'est tout ce paquet qu'on multiplie ensuite par a . Écris-le en entier avant de distribuer, tu ne te tromperas pas.

3. Passer de la développée à la canonique

Quand l'utiliser : on te donne la forme développée et on te demande le sommet, le minimum ou le maximum de f .

À RETENIR · LA MÉTHODE EN TROIS ÉTAPES

Pour écrire $f(x) = ax^2 + bx + c$ sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$:

1. repérer a , b et c ;
2. calculer $\alpha = \frac{-b}{2a}$, puis $\beta = f(\alpha)$ (on remplace x par α dans f) ;
3. écrire $a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec le **même** a .

Exemple 1. Écrire $f(x) = x^2 - 4x + 7$ sous forme canonique.

$a = 1, b = -4$ et $c = 7$.

$$\alpha = \frac{-(-4)}{2 \times 1} \quad \text{donc} \quad \alpha = 2$$

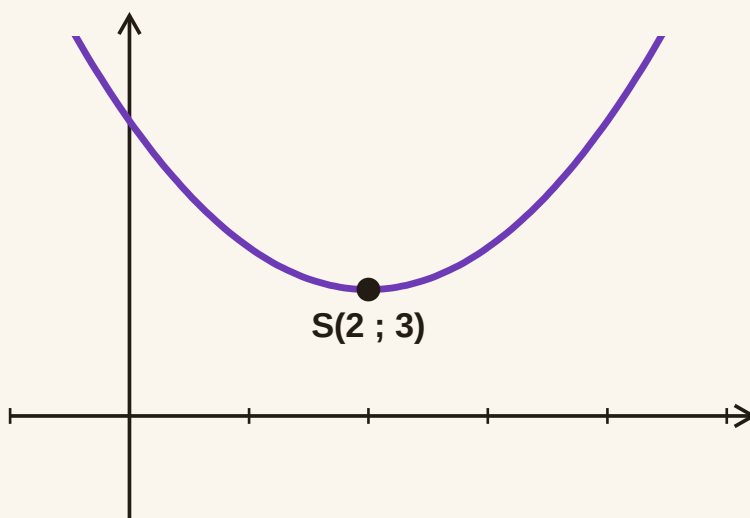
$$f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 7$$

$$f(2) = 3 \quad \text{donc} \quad \beta = 3$$

On conclut :

$$f(x) = (x - 2)^2 + 3$$

C'est la fonction de la partie 2 : on vient de faire le trajet dans l'autre sens.



Exemple 2 — quand $a \neq 1$. Écrire $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$ sous forme canonique.

$a = 2, b = -12$ et $c = 10$.

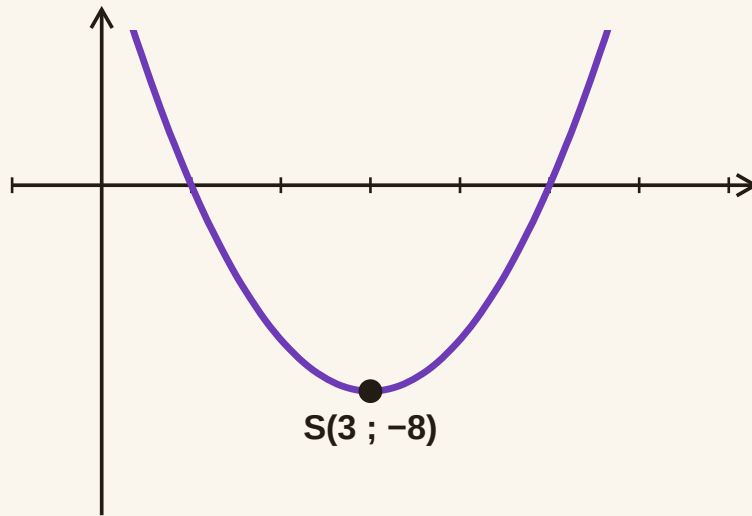
$$\alpha = \frac{-(-12)}{2 \times 2} \quad \text{donc} \quad \alpha = 3$$

$$f(3) = 2 \times 3^2 - 12 \times 3 + 10$$

$$f(3) = -8 \quad \text{donc} \quad \beta = -8$$

On garde le $a = 2$ devant la parenthèse :

$$f(x) = 2(x - 3)^2 - 8$$



Pour vérifier, on redéveloppe la forme canonique : on doit retomber sur la forme de départ. Avec l'exemple 2 :

$$2(x - 3)^2 - 8 = 2(x^2 - 6x + 9) - 8$$

$$2(x - 3)^2 - 8 = 2x^2 - 12x + 10$$

C'est bien $f(x)$. Et attention au signe de $\alpha = \frac{-b}{2a}$: ici $b = -12$, donc $-b = +12$.

4. Le discriminant et les racines

Quand l'utiliser : on te demande où la courbe coupe l'axe des abscisses, ou de résoudre $f(x) = 0$. Sur le dessin, ce sont les points où la courbe traverse l'axe.

À RETENIR · LE DISCRIMINANT, ET COMBIEN DE SOLUTIONS

À partir de la forme développée $ax^2 + bx + c$:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Résoudre $f(x) = 0$, c'est chercher les **racines**. Trois cas, et trois seulement :

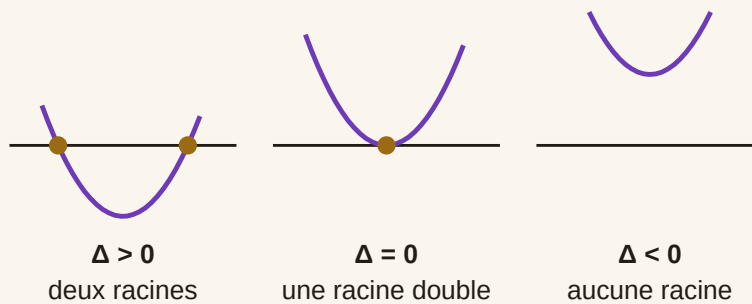
- $\Delta > 0$: deux racines réelles distinctes,

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $\Delta = 0$: une racine double,

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

- $\Delta < 0$: **aucune** racine réelle.



5. Passer à la forme factorisée

Quand l'utiliser : tu veux écrire f comme un produit, ou voir directement en quels points la courbe coupe l'axe des abscisses.

À RETENIR · LA MÉTHODE

On part de la forme développée $ax^2 + bx + c$.

1. calculer Δ ;
2. si $\Delta > 0$, calculer les deux racines x_1 et x_2 ;
3. écrire $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, avec le **même** a .

Si $\Delta = 0$: $f(x) = a(x - x_0)^2$. Si $\Delta < 0$: pas de forme factorisée, puisqu'il n'y a pas de racine.

Exemple 1. Écrire $f(x) = x^2 - 2x - 3$ sous forme factorisée.

$a = 1$, $b = -2$ et $c = -3$.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)$$

$$\Delta = 4 + 12$$

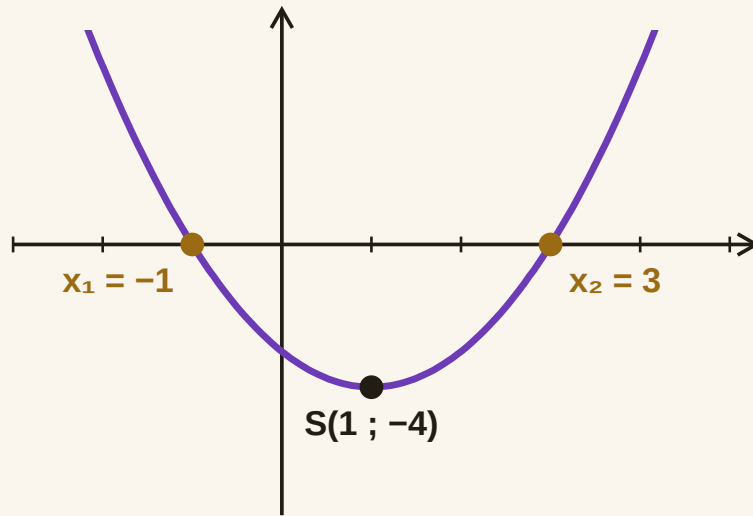
$$\Delta = 16$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} \quad \text{donc} \quad x_1 = -1$$

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} \quad \text{donc} \quad x_2 = 3$$

On conclut, en écrivant $x - (-1) = x + 1$:

$$f(x) = (x + 1)(x - 3)$$



Exemple 2 — quand $a \neq 1$. Écrire $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ sous forme factorisée.

$a = -1$, $b = 4$ et $c = -3$.

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3)$$

$$\Delta = 16 - 12$$

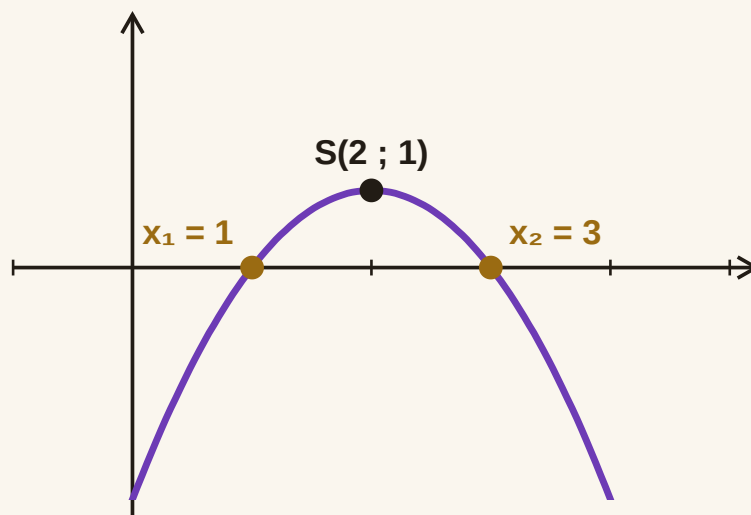
$$\Delta = 4$$

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \times (-1)} \quad \text{donc} \quad x_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \times (-1)} \quad \text{donc} \quad x_2 = 1$$

On garde le $a = -1$ devant :

$$f(x) = -(x - 3)(x - 1)$$



Pour vérifier, on redéveloppe :

$$-(x-3)(x-1) = -(x^2 - 4x + 3)$$

$$-(x-3)(x-1) = -x^2 + 4x - 3$$

On retrouve la forme de départ. Et sur la courbe, les racines 1 et 3 sont les abscisses des deux points où elle coupe l'axe.

6. Lire la courbe sans rien calculer

Quand l'utiliser : on te donne la forme canonique, ou une courbe, et tu veux son allure, son sommet et ses variations sans rien calculer.

À RETENIR · CE QUE LES TROIS COEFFICIENTS TE DISENT

Sur la forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$, tout se lit :

- le signe de a donne l'orientation : $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut ; $a < 0$, vers le bas ;
- α est l'abscisse du sommet, β son ordonnée :

$$S(\alpha ; \beta)$$

- si $a > 0$, β est le **minimum** de f ; si $a < 0$, c'est son **maximum**. Dans les deux cas il est atteint en $x = \alpha$.

À RETENIR · LE PIÈGE DU SIGNE — À LIRE DEUX FOIS

Le modèle est $a(x - \alpha)^2 + \beta$: on **retranche** α . Donc :

$(x - 2)^2$ donne $\alpha = +2$ — le sommet est à **droite**.

$(x + 1)^2$ s'écrit $(x - (-1))^2$, donc $\alpha = -1$ — le sommet est à **gauche**.

Quand tu vois un $+$ dans la parenthèse, α est **négligé**. Réécris toujours la parenthèse sous la forme $(x - \dots)^2$ avant de conclure.

7. Le pont entre les deux moitiés du chapitre

Quand l'utiliser : pour prévoir le nombre de racines avant de calculer Δ , puis contrôler ton calcul.

On voit souvent Δ d'un côté et la forme canonique de l'autre, sans que les deux se parlent. Or ils sont reliés par une seule égalité :

À RETENIR · LE SOMMET ET LE DISCRIMINANT DISENT LA MÊME CHOSE

$$\beta = -\frac{\Delta}{4a}$$

Conséquence, et c'est elle qui sert : **tu peux annoncer le nombre de racines rien qu'en regardant le dessin**, sans calculer Δ .

- $a > 0$ et $\beta > 0$: le creux est au-dessus de l'axe, la courbe ne le touche jamais → **aucune racine**.
- $a < 0$ et $\beta < 0$: la bosse est sous l'axe → **aucune racine**.
- $\beta = 0$: le sommet est posé *sur* l'axe → **une racine double**.
- a et β de **signes contraires** : la courbe traverse l'axe → **deux racines**.

C'est un excellent moyen de contrôle : tu lis le nombre de racines sur le dessin, tu calcules Δ , et les deux doivent dire la même chose. Si elles se contredisent, il y a une erreur quelque part — et tu sais qu'il faut la chercher.

② Six courbes, lues une par une

Chaque courbe isole **un** paramètre à la fois : d'abord β qui monte ou descend la parabole, puis α qui la déplace latéralement, puis le signe de a qui la retourne. Pour chacune, on lit l'orientation, le sommet et le nombre de racines *sans rien calculer* — et on vérifie ensuite.

Courbe 1 LA PARABOLE DE RÉFÉRENCE

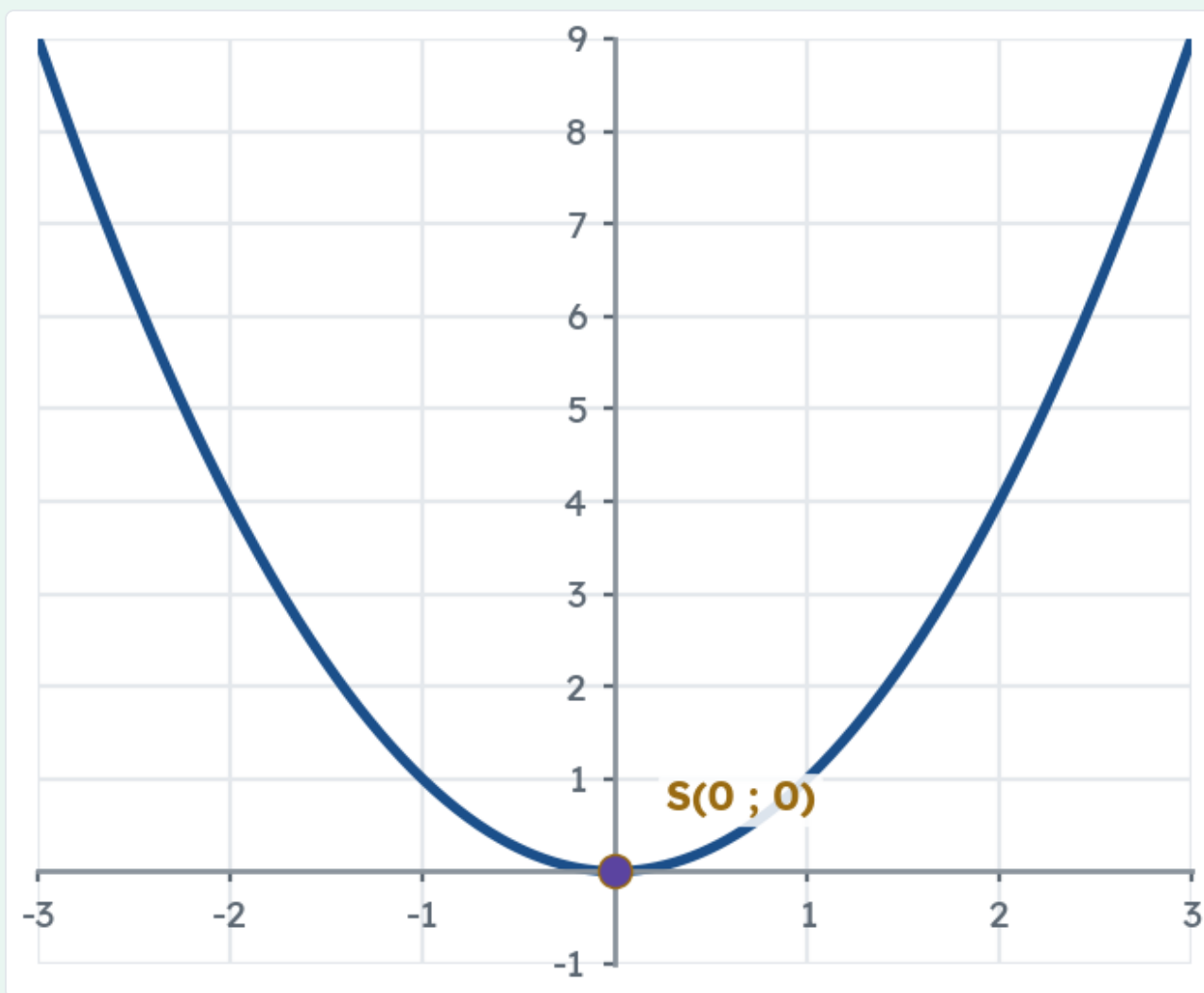
C'est la parabole de référence, celle dont toutes les autres sont des déplacements.

$$f(x) = x^2$$

Écris avec a , α et β bien visibles :

$$f(x) = 1(x - 0)^2 + 0$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9



la courbe de $f(x) = x^2$

CORRECTION

$a = 1 > 0$: tournée vers le haut. $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, donc le sommet est $S(0 ; 0)$, posé sur l'origine.

$\beta = 0$: le sommet touche l'axe des abscisses **en un seul point**. Il y a donc une **racine double**, et c'est 0.

Courbe 2 LA MÊME, MONTÉE DE 2

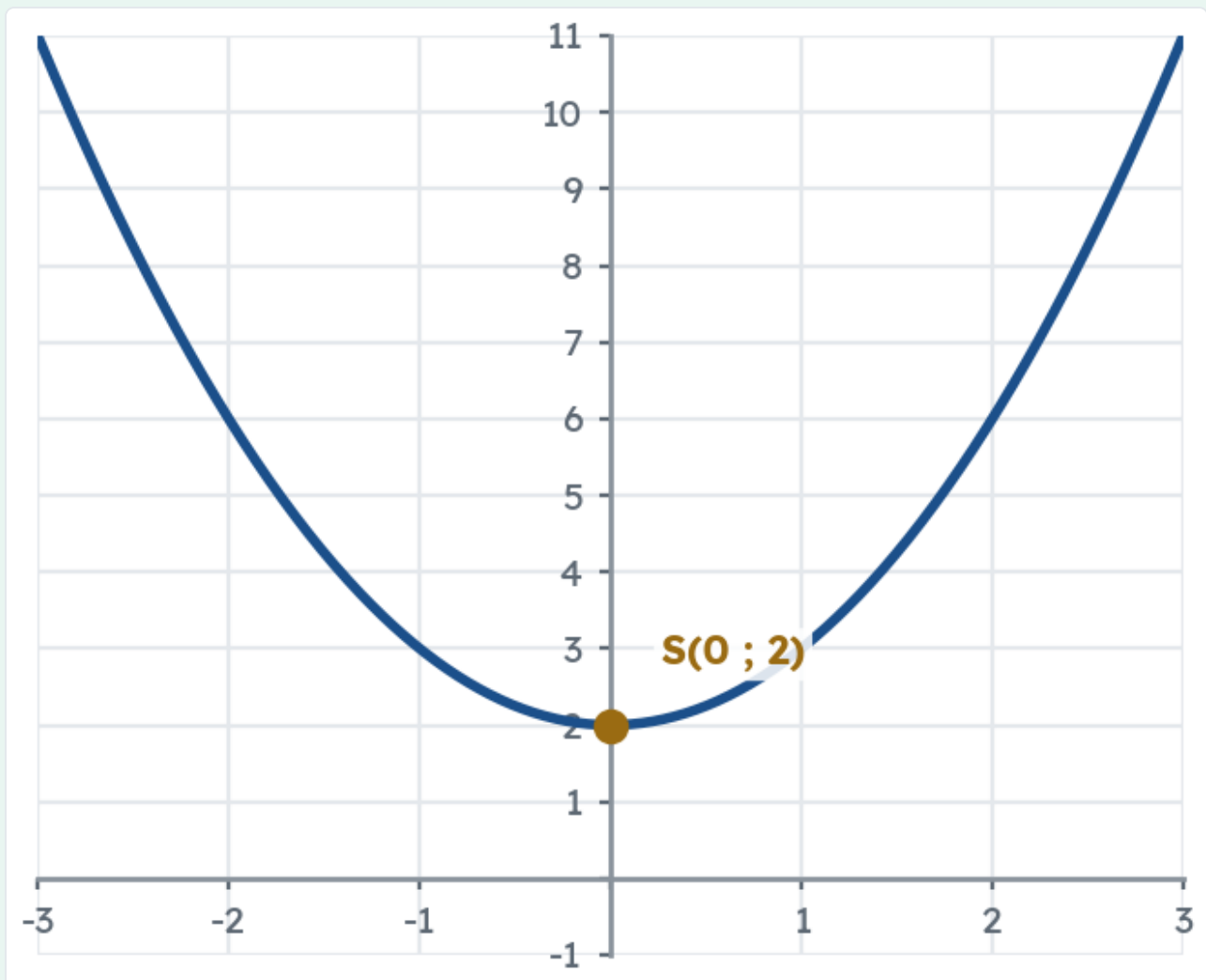
La même, montée de 2.

$$f(x) = x^2 + 2$$

Écrite avec a , α et β bien visibles :

$$f(x) = 1(x - 0)^2 + 2$$

x	-1	0	1
$f(x)$	3	2	3



la courbe de $f(x) = x^2 + 2$

CORRECTION

$a = 1 > 0, \alpha = 0, \beta = 2$: sommet $S(0; 2)$, tournée vers le haut.

$a > 0$ et $\beta = 2 > 0$: le point le plus bas de la courbe est à la hauteur 2, donc **toute** la parabole est au-dessus de l'axe. Elle ne le coupe jamais : **aucune racine**.

Courbe 3 LA RÉFÉRENCE, RETOURNÉE

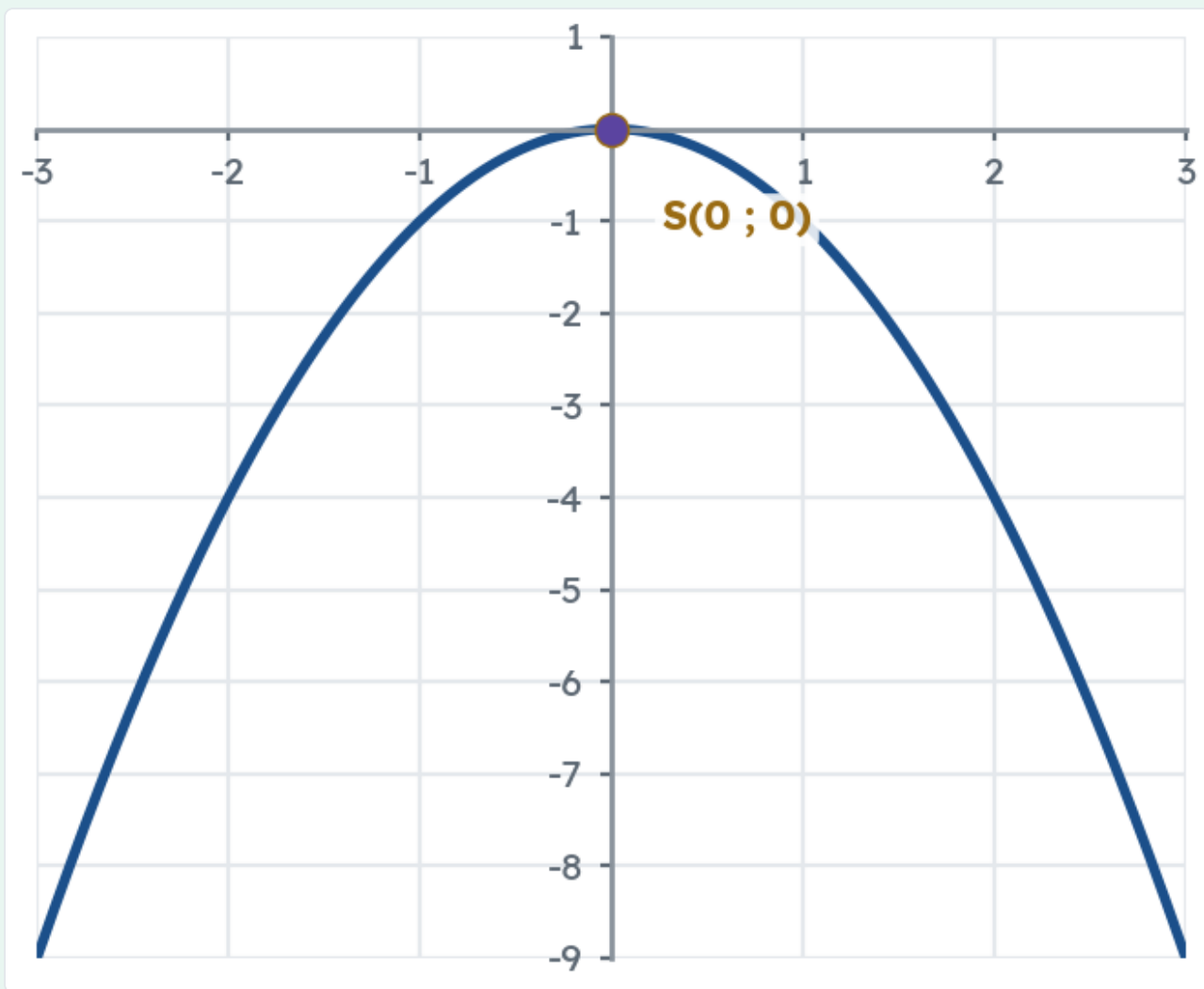
La courbe 1 retournée.

$$f(x) = -x^2$$

Écris avec a , α et β bien visibles :

$$f(x) = -1(x - 0)^2 + 0$$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-4	-1	0	-1	-4



la courbe de $f(x) = -x^2$

CORRECTION

$a = -1 < 0$: tournée vers le bas. Sommet $S(0 ; 0)$, et cette fois $\beta = 0$ est le **maximum**.

C'est aussi la première où les variations s'inversent : la fonction **croît** jusqu'à 0, puis **décroît**. Avec $a > 0$ c'était l'inverse.

$\beta = 0$: sommet sur l'axe, donc une **racine double**, égale à 0.

Courbe 4 **LE MODÈLE, TRAITÉ EN ENTIER**

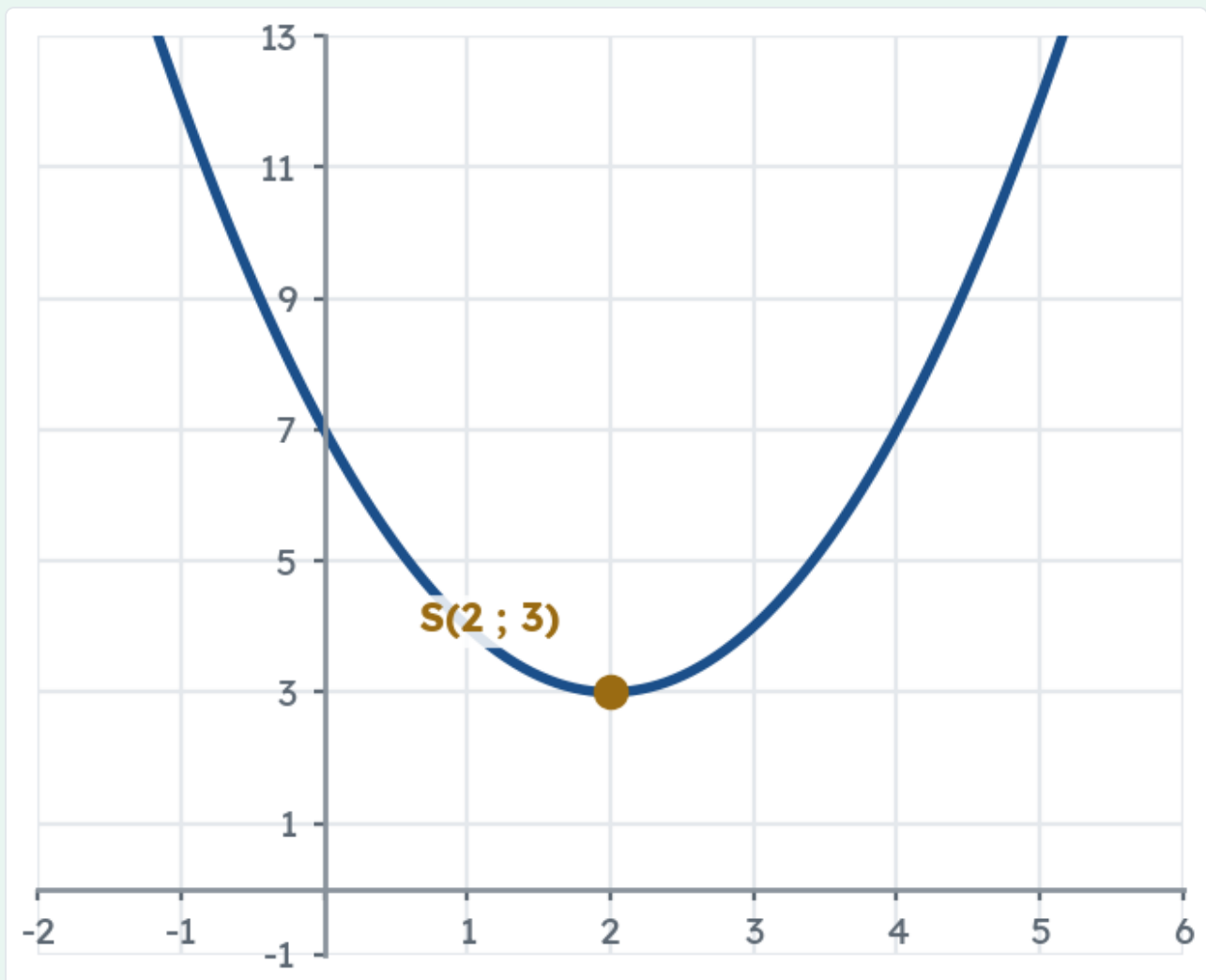
Celle-ci déplace le sommet dans les deux directions à la fois. C'est l'exemple traité complètement : **c'est le modèle des lignes du tableau à remplir.**

$$f(x) = (x - 2)^2 + 3$$

Écrite avec a , α et β bien visibles :

$$f(x) = 1(x - 2)^2 + 3$$

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	12	7	4	3	4	7



la courbe de $f(x) = (x - 2)^2 + 3$

CORRECTION

1

Je lis la forme canonique. La parenthèse est $(x - 2)$, donc $\alpha = +2$ — on retranche 2. Le sommet est à droite :

$$a = 1 \quad \alpha = 2 \quad \beta = 3 \quad S(2; 3)$$

$a > 0$: tournée vers le haut, et 3 est le minimum de f , atteint en $x = 2$.

2

J'annonce les racines avant de calculer. $a > 0$ et $\beta = 3 > 0$: le point le plus bas est à la hauteur 3, la courbe reste au-dessus de l'axe. Je prévois donc **aucune racine**, c'est-à-dire $\Delta < 0$.

3

Je développe.

$$(x - 2)^2 + 3 = x^2 - 4x + 4 + 3$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 7$$

donc $a = 1, b = -4, c = 7$.

4

Je calcule Δ .

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 7$$

$$\Delta = 16 - 28$$

$$\Delta = -12$$

5

Je conclus, et je vérifie que les deux lectures s'accordent. $\Delta = -12 < 0$: l'équation $f(x) = 0$ n'a **aucune solution réelle**. C'est bien ce que le dessin annonçait.

$$f(x) = x^2 - 4x + 7, \Delta = -12 < 0, \text{ aucune racine.}$$

Contrôle du pont : $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-12}{4}$, soit $-\frac{\Delta}{4a} = 3$, et c'est bien β . ✓

Courbe 5 **LE PIÈGE DU SIGNE**

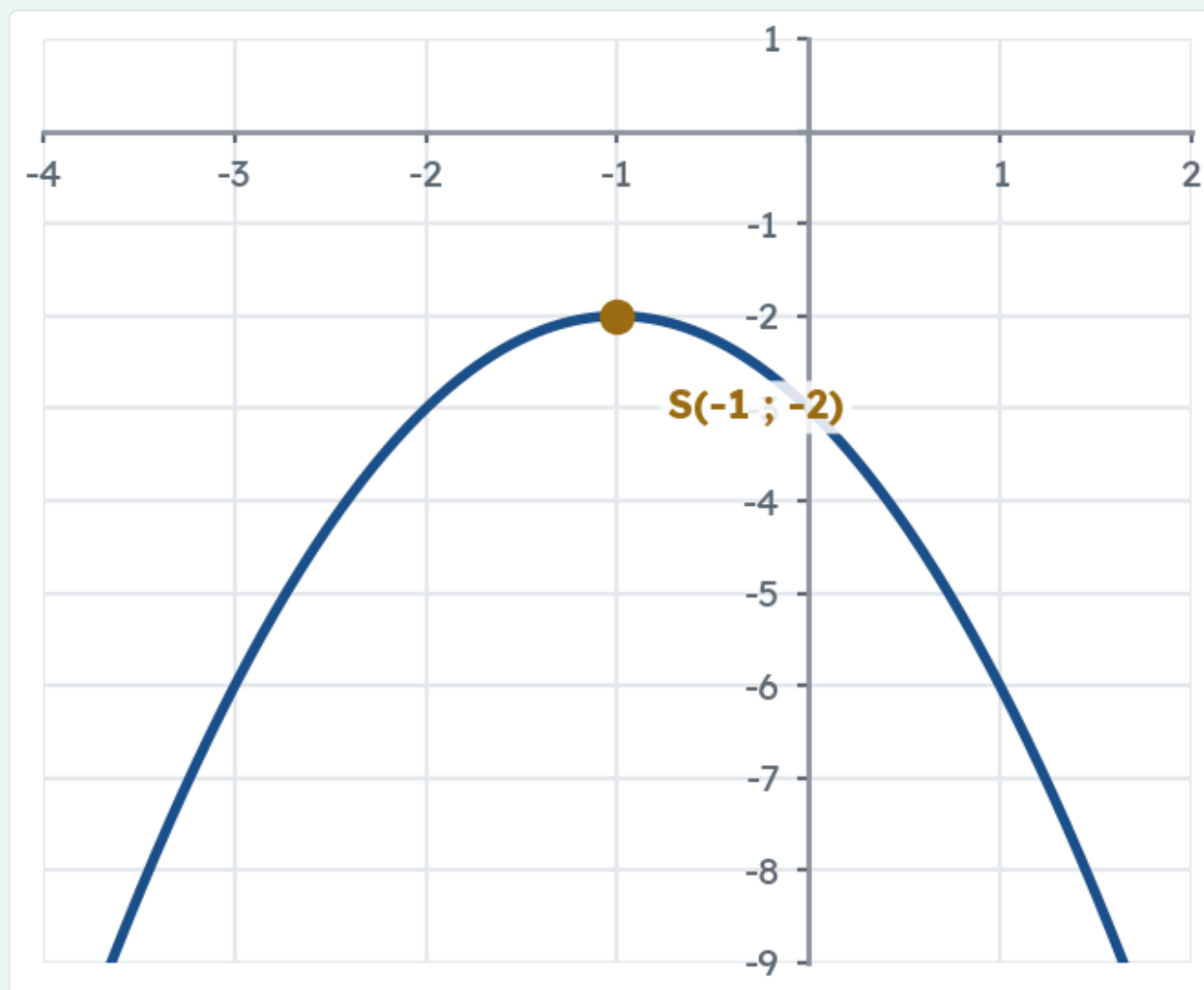
Le sommet est à gauche *et* en dessous. C'est la plus piègeuse des cinq : les deux signes se retournent en même temps.

$$f(x) = -(x + 1)^2 - 2$$

Écrite avec a , α et β bien visibles :

$$f(x) = -1 (x - (-1))^2 - 2$$

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	-6	-3	-2	-3	-6



la courbe de $f(x) = -(x + 1)^2 - 2$

CORRECTION

La parenthèse s'écrit $(x + 1)$, donc $\alpha = -1$: sommet à gauche. C'est exactement le piège du signe.

$$a = -1 \quad \alpha = -1 \quad \beta = -2 \quad S(-1; -2)$$

$a < 0$: tournée vers le bas, -2 est le **maximum**.

Racines : $a < 0$ et $\beta = -2 < 0$. Le point le plus *haut* de la courbe est déjà sous l'axe : toute la parabole est en dessous. **Aucune racine**.

③ À toi de jouer

Le tableau se remplit ligne par ligne ; puis on met deux fonctions sous forme canonique ; les trois tracés sont l'essentiel, et les deux derniers sont les seuls de toute la fiche où la parabole *traverse* l'axe.

Les réponses sont à la fin de la fiche, dans « Réponses des devoirs ». Cherche d'abord, vérifie ensuite.

- 1. Compléter le tableau ci-dessous.** Une ligne par fonction. La ligne de $(x - 2)^2 + 3$ est déjà remplie : c'est le modèle, et sa correction complète est la **Courbe 4** de cette fiche.

Consigne qui compte : pour chaque ligne, remplis d'abord la colonne « combien de racines » en regardant le dessin (ou le signe de a et de β). Calcule Δ ensuite. Les deux doivent s'accorder.

$f(x)$	a	α	β	forme développée	Δ	combien ?	racines
x^2							
$x^2 + 2$							
$-x^2$							
$(x - 2)^2 + 3$	1	2	3	$x^2 - 4x + 7$	-12	aucune	—
$-(x + 1)^2 - 2$							
$-(x - 2)^2 + 5$							
$(x - 1)^2 - 4$							
$-(x + 1)^2 + 4$							

2. Mettre sous forme canonique chacune des fonctions :

$$f(x) = x^2 + 6x + 5$$

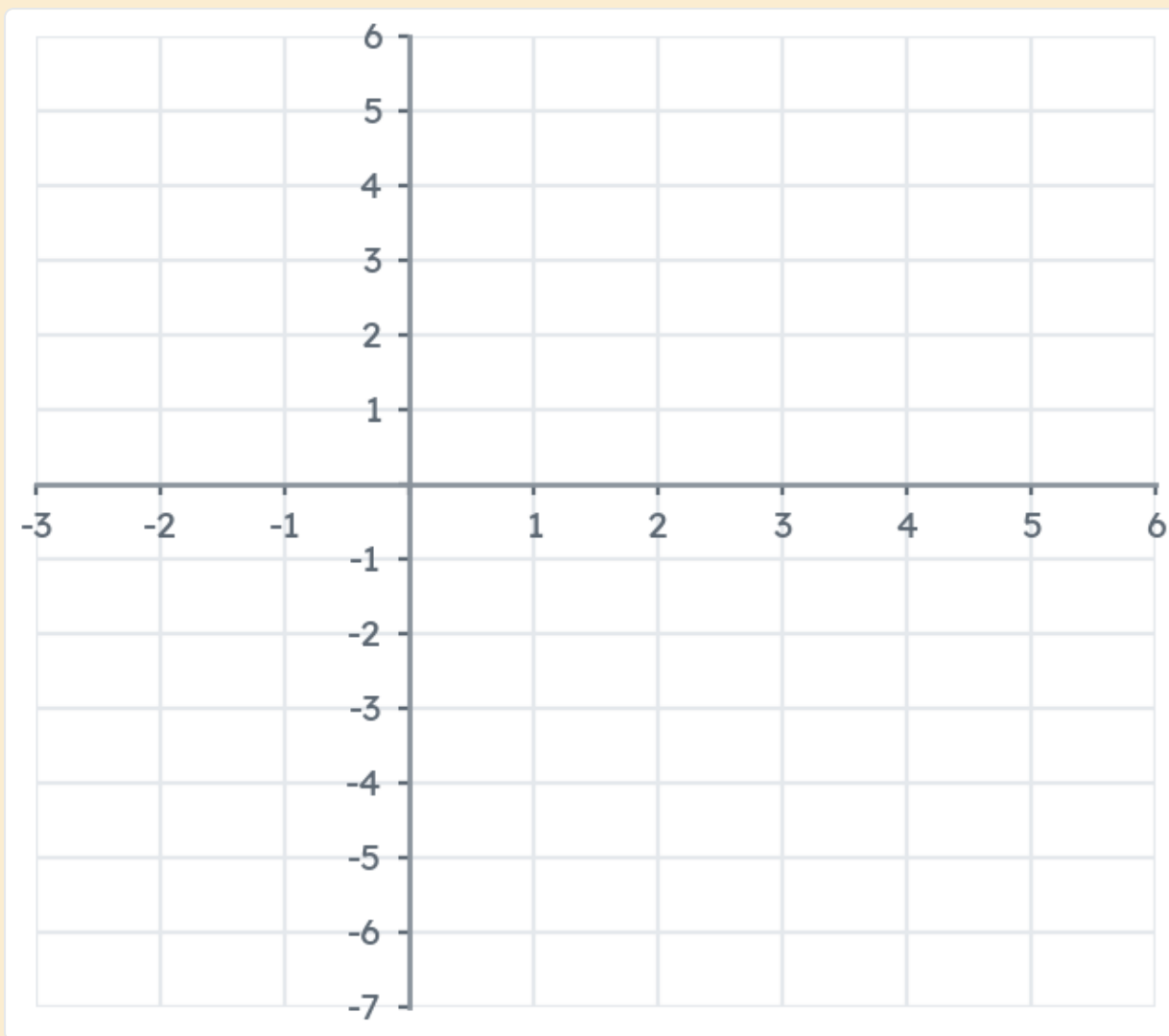
$$g(x) = -2x^2 + 8x - 3$$

Utilise la méthode en trois étapes de la partie 3, puis vérifie en redéveloppant.

3. Tracer la courbe de :

$$f(x) = -(x - 2)^2 + 5$$

Repère les points $(0 ; 1)$, $(1 ; 4)$, $(2 ; 5)$, $(3 ; 4)$, $(4 ; 1)$, puis place aussi $(-1 ; -4)$ et $(5 ; -4)$. Marque le sommet.

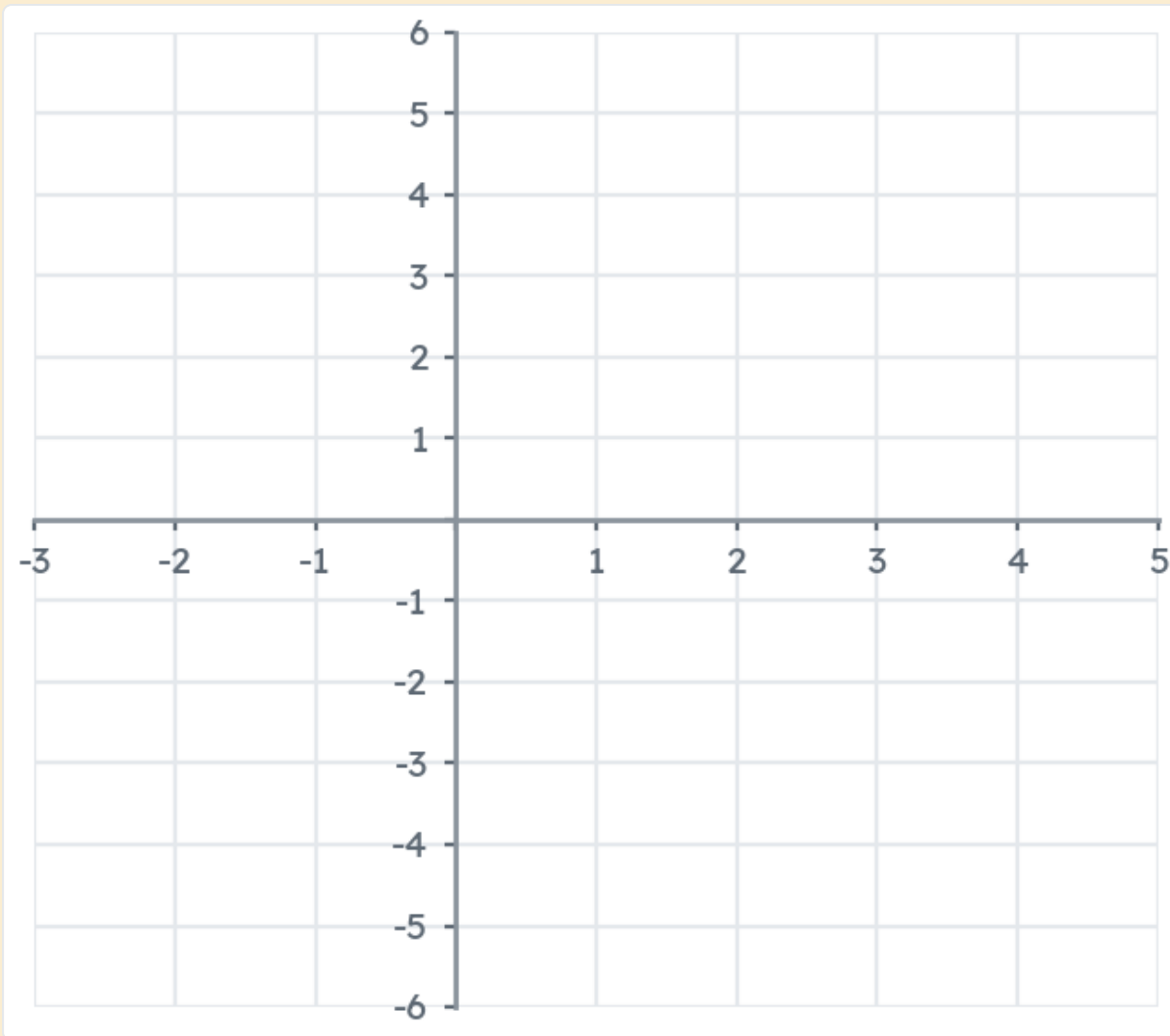


Repère à utiliser — tu peux tracer directement dessus.

4. Tracer la courbe de :

$$f(x) = (x - 1)^2 - 4$$

Fais d'abord ton tableau de valeurs pour x allant de -2 à 4 . Place le sommet, puis les deux points où la courbe coupe l'axe des abscisses : cette fois, ils tombent sur le quadrillage.



Repère à utiliser — tu peux tracer directement dessus.

5. Tracer la courbe de :

$$f(x) = -(x + 1)^2 + 4$$

Même travail. Attention à la parenthèse : réécris-la sous la forme $(x - \dots)^2$ avant de dire où est le sommet.



Repère à utiliser — tu peux tracer directement dessus.

Réponses des devoirs

À ne regarder qu'après avoir cherché, et à comparer avec ta rédaction : la réponse seule ne suffit pas en contrôle, c'est la justification qui compte.

Réponses des exercices de « À toi de jouer ».

- $x^2 : a = 1, \alpha = 0, \beta = 0$, développée $x^2, \Delta = 0$, racine double 0. — $x^2 + 2 : 1, 0, 2, x^2 + 2, \Delta = -8$, aucune. — $-x^2 : -1, 0, 0, -x^2, \Delta = 0$, racine double 0. — $-(x+1)^2 - 2 : -1, -1, -2, -x^2 - 2x - 3, \Delta = -8$, aucune. — $-(x-2)^2 + 5 : -1, 2, 5, -x^2 + 4x + 1, \Delta = 20$, deux racines $2 - \sqrt{5} \approx -0,24$ et $2 + \sqrt{5} \approx 4,24$. — $(x-1)^2 - 4 : 1, 1, -4, x^2 - 2x - 3, \Delta = 16$, deux racines -1 et 3 . — $-(x+1)^2 + 4 : -1, -1, 4, -x^2 - 2x + 3, \Delta = 16$, deux racines -3 et 1 . Contrôle du pont sur chaque ligne : $\beta = -\Delta/(4a)$.
- $f : a = 1, b = 6, c = 5. \alpha = \frac{-6}{2}$, donc $\alpha = -3. f(-3) = 9 - 18 + 5$, soit $f(-3) = -4$, donc $\beta = -4$.
Forme canonique : $f(x) = (x+3)^2 - 4$ — la parenthèse s'écrit $(x+3)$ parce que $\alpha = -3$.
Vérification : $(x+3)^2 - 4 = x^2 + 6x + 9 - 4$, et on retrouve bien $x^2 + 6x + 5$. — $g : a = -2, b = 8, c = -3. \alpha = \frac{-8}{2 \times (-2)}$, donc $\alpha = 2. g(2) = -8 + 16 - 3$, soit $g(2) = 5$, donc $\beta = 5$.
Forme canonique : $g(x) = -2(x-2)^2 + 5$. Vérification : $-2(x-2)^2 + 5 = -2(x^2 - 4x + 4) + 5$, et en développant on retrouve bien $-2x^2 + 8x - 3$.
- $a = -1, \alpha = 2, \beta = 5$, sommet $S(2; 5)$, tournée vers le bas. $a < 0$ et $\beta > 0$: signes contraires, la courbe traverse l'axe, il y a deux racines. Développée $-x^2 + 4x + 1, \Delta = 20 > 0$, racines $2 \pm \sqrt{5}$, soit environ $-0,24$ et $4,24$ — on les voit sur le dessin, mais on ne peut pas les lire exactement : c'est le calcul qui les donne.
- valeurs : $f(-2) = 5, f(-1) = 0, f(0) = -3, f(1) = -4, f(2) = -3, f(3) = 0, f(4) = 5. a = 1, \alpha = 1, \beta = -4$, sommet $S(1; -4)$. $a > 0$ et $\beta < 0$: signes contraires, donc deux racines. Développée $x^2 - 2x - 3, \Delta = 4 + 12$, soit $\Delta = 16, \sqrt{\Delta} = 4$, racines $\frac{2-4}{2} = -1$ et $\frac{2+4}{2} = 3$ — exactement les deux points lus sur le dessin.
- $(x+1)^2 = (x-(-1))^2$, donc $\alpha = -1$. Valeurs : $f(-4) = -5, f(-3) = 0, f(-2) = 3, f(-1) = 4, f(0) = 3, f(1) = 0, f(2) = -5. a = -1, \beta = 4$, sommet $S(-1; 4)$, tournée vers le bas. $a < 0$ et $\beta > 0$: signes contraires, donc deux racines. Développée $-x^2 - 2x + 3, \Delta = 4 + 12$, soit $\Delta = 16$, racines -3 et 1 .