Limites de suites

Terminale maths complémentaires | Mathématiques | Fiche de cours

DANS CETTE FICHE

1 Reconnaître une limite 1
2 L'essentiel du cours 3
3 Exercices types 9
4 À toi de jouer 15
Réponses des devoirs 17

1 Reconnaître une limite

Cette fiche couvre la limite d'une suite, les opérations sur les limites, la limite d'une suite géométrique et le théorème des gendarmes. Les théorèmes de comparaison, la somme des termes d'une suite géométrique, les suites arithmético-géométriques et la représentation graphique d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ seront traités dans une prochaine fiche.

À RETENIR · LE TABLEAU À AVOIR EN TÊTE

Quatre situations, et une porte de sortie. Dans tous les cas, la limite se cherche quand n tend vers $+\infty$.

Ce que je vois	Ce que je fais
$u_n = u_0 \times q^n$: une suite **géométrique** $u_n = 8 \times (0{,}3)^n$	je regarde **où est** q : entre -1 et 1, $q^n \to 0$; plus grand que 1, $q^n \to +\infty$. Puis je multiplie par u_0, dont le signe compte (partie 3) $0{,}3^n \to 0$, donc $u_n \to 0$
une **somme**, un **produit** ou un **quotient** de morceaux dont je connais la limite $u_n = 4 + \dfrac{3}{\sqrt{n}}$	je calcule la limite de **chaque morceau**, puis j'applique les règles d'opérations (partie 2) $4 + 0 = 4$
le calcul tombe sur $(+\infty) - (+\infty)$, “0” $\times \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ ou $\dfrac{\text{“0”}}{\text{“0”}}$: une **forme indéterminée** $u_n = n^2 - 6n$ donne $(+\infty) - (+\infty)$	je **factorise** par le terme qui grandit le plus vite, et je recommence le calcul sur la nouvelle écriture (partie 2) $n^2\left(1 - \dfrac{6}{n}\right) \to +\infty$
un morceau qui **oscille** sans limite : $(-1)^n$, $\cos(n)$, $\sin(n)$ $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$	je l'**encadre** entre -1 et 1, je transforme l'encadrement jusqu'à retrouver u_n au milieu, et je conclus avec le théorème des gendarmes (partie 4) $-\dfrac{1}{n} \le u_n \le \dfrac{1}{n}$, donc $u_n \to 0$
rien de tout ça $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$, $u_0 = 5$	je calcule u_{10}, u_{100}, u_{1000} à la calculatrice pour **conjecturer** la limite, et je l'écris comme une conjecture (« il semble que… »), pas comme un résultat (partie 5)

2 L'essentiel du cours

1. Convergente, divergente

Quand on écrit $\lim u_n$, c'est **toujours** quand n tend vers $+\infty$: on regarde ce que deviennent u_{100}, u_{1000}, $u_{10\,000}$… quand le rang grandit sans fin. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Trois choses peuvent arriver.

Les termes se rapprochent d'un nombre. On le note ℓ (« l » comme *limite*) : $\ell = \dfrac{1}{3}$, $\ell = \pi$, $\ell = 5$, $\ell = -3$… La limite est **finie**.

Les termes dépassent n'importe quel nombre. Aussi grand que soit le nombre choisi, les termes finissent par le dépasser et ne redescendent plus : $\lim u_n = +\infty$. Ou la même chose vers le bas : $\lim u_n = -\infty$.

Les termes n'ont pas de limite. Ils oscillent sans se fixer. L'exemple à connaître : $(-1)^n$, qui vaut -1 si n est impair et 1 si n est pair. La suite fait $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$ pour toujours.

À RETENIR · CONVERGENTE OU DIVERGENTE

Une suite est **convergente** quand elle a une limite finie ℓ. Si elle n'est pas convergente, elle est **divergente** : vers $+\infty$, vers $-\infty$, ou sans limite du tout.

« Divergente » ne veut donc pas dire « tend vers l'infini » : $(-1)^n$ est divergente, et elle ne va nulle part.

2. Les opérations sur les limites

Une suite est souvent faite de morceaux dont on connaît la limite : $4 + \dfrac{3}{\sqrt{n}}$, c'est le nombre 4 plus un quotient. On calcule la limite de chaque morceau, puis on combine. Dans la plupart des cas, le résultat est celui qu'on devine.

À RETENIR · CE QUI SE CALCULE TOUT SEUL

Somme. $\ell + \ell'$ donne le nombre $\ell + \ell'$; un nombre plus $+\infty$ donne $+\infty$; $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$. Pareil avec $-\infty$.

Produit. $\ell \times \ell'$ donne le nombre $\ell \times \ell'$; un nombre non nul fois ∞ donne ∞ ; $\infty \times \infty$ donne ∞. Le signe suit la **règle des signes** : $(-2) \times (+\infty) = -\infty$, $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$.

Quotient. $\dfrac{\ell}{\ell'}$ donne le nombre $\dfrac{\ell}{\ell'}$ quand $\ell' \neq 0$. Un infini divisé par un nombre $\ell' \neq 0$ donne un infini, avec la règle des signes : $\dfrac{+\infty}{2} = +\infty$, $\dfrac{+\infty}{-3} = -\infty$. Pour le reste, voir les quatre quotients ci-dessous et les formes indéterminées.

À RETENIR · QUATRE QUOTIENTS À CONNAÎTRE

Les guillemets de “0” rappellent qu'il s'agit d'un morceau *qui tend vers* 0, jamais du nombre 0 : on ne divise pas par zéro.

$\dfrac{\ell}{\text{“0”}} = \pm\infty$ (avec $\ell \neq 0$). L'intuition : $\dfrac{5}{0{,}1} = 50$, $\dfrac{5}{0{,}01} = 500$, $\dfrac{5}{0{,}001} = 5000$… plus on divise par petit, plus le résultat est grand.

$\dfrac{\infty}{\text{“0”}} = \pm\infty \qquad \dfrac{\ell}{\infty} = 0 \qquad \dfrac{\text{“0”}}{\infty} = 0$

Le signe de $\pm\infty$ se lit avec la règle des signes : un “0” atteint par des valeurs positives compte comme positif, par des valeurs négatives comme négatif.

À RETENIR · LES QUATRE FORMES INDÉTERMINÉES

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{\text{“0”}}{\text{“0”}} \qquad (+\infty) - (+\infty) \qquad \text{“0”} \times \infty$$

Indéterminée veut dire : la règle ne donne rien, tout peut arriver. $n^2 - n$ et $n - n^2$ sont tous les deux du type $(+\infty) - (+\infty)$, et l'un tend vers $+\infty$, l'autre vers $-\infty$. Il faut **transformer l'écriture** avant de conclure.

Méthode : calculer une limite par opérations. Découper la suite en morceaux, écrire la limite de chaque morceau, combiner, et vérifier qu'on n'est pas tombé sur une forme indéterminée.

Exemple résolu. Limite de $u_n = \left(2 - \frac{5}{n}\right) \times \sqrt{n}$, pour $n \geqslant 1$.

1. Le premier facteur : $\lim \frac{5}{n} = 0$ (un nombre sur ∞), donc $\lim \left(2 - \frac{5}{n}\right) = 2 - 0 = 2$.

2. Le second facteur : $\lim \sqrt{n} = +\infty$.

3. Produit : $2 \times (+\infty) = +\infty$. Pas de forme indéterminée, puisque $2 \neq 0$.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Méthode : lever une forme indéterminée. On factorise par le terme qui grandit le plus vite, qu'on appelle le terme dominant (n^2 devant n, n devant $\sqrt{n}$) : la nouvelle écriture n'est plus indéterminée.

Exemple résolu. Limite de $u_n = n^2 - 6n$.

1. Morceau par morceau : $\lim n^2 = +\infty$ et $\lim 6n = +\infty$. La différence donne $(+\infty) - (+\infty)$: forme indéterminée, on ne peut pas conclure.

2. On factorise par n^2, le terme dominant : $u_n = n^2 \left(1 - \frac{6}{n}\right)$ pour $n \geqslant 1$.

3. $\lim \frac{6}{n} = 0$, donc $\lim \left(1 - \frac{6}{n}\right) = 1$; et $\lim n^2 = +\infty$. Produit : $1 \times (+\infty) = +\infty$. Cette fois, rien d'indéterminé.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Pour un quotient. Quand le calcul donne $\frac{\infty}{\infty}$, on factorise le numérateur par son terme dominant, le dénominateur par le sien, puis on simplifie la fraction.

Exemple résolu. Limite de $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$, pour $n \geqslant 1$.

1. $\lim(3n+1) = +\infty$ et $\lim(n+2) = +\infty$: le quotient donne $\frac{\infty}{\infty}$, forme indéterminée.

2. On factorise par n en haut et en bas :

$$3n+1 = n\left(3+\frac{1}{n}\right)$$

$$n+2 = n\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

3. On simplifie par n, qui n'est pas nul :

$$u_n = \frac{n\left(3+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}$$

$$u_n = \frac{3+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}$$

4. $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim \dfrac{2}{n} = 0$: le numérateur tend vers 3, le dénominateur vers 1. Quotient : $\dfrac{3}{1} = 3$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$$

Avec une racine carrée, on se sert de $\dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, qui vient de $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$: c'est ce que fait l'exercice 3.

3. La limite d'une suite géométrique

Une suite géométrique s'écrit $u_n = u_0 \times q^n$. Sa limite dépend de la raison q : c'est q^n qui décide, et u_0 ne fait que multiplier.

À RETENIR · LA LIMITE DE Q PUISSANCE N

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$. Si $q = 1$, $q^n = 1$ pour tout n : la suite est constante.

Puis on multiplie par u_0 : si $q^n \to 0$, alors $u_n \to 0$ quel que soit u_0. Si $q^n \to +\infty$, alors $u_n \to +\infty$ quand $u_0 > 0$ et $u_n \to -\infty$ quand $u_0 < 0$.

Méthode. Repérer u_0 et q, situer q par rapport à -1 et 1, écrire la limite de q^n, puis multiplier par u_0.

Exemple résolu. (a) Un capital de 1200 € perd $5\,\%$ de sa valeur chaque année : $u_n = 1200 \times 0{,}95^n$. (b) $v_n = -3 \times 1{,}5^n$.

1. (a) Ici $u_0 = 1200$ et $q = 0{,}95$. Comme $-1 < 0{,}95 < 1$, $\lim 0{,}95^n = 0$.

2. Donc $\lim u_n = 1200 \times 0 = 0$: le capital fond vers zéro, sans jamais devenir négatif.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

3. (b) Ici $v_0 = -3$ et $q = 1{,}5$. Comme $1{,}5 > 1$, $\lim 1{,}5^n = +\infty$.

4. Produit par -3, un nombre négatif : $(-3) \times (+\infty) = -\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$$

ATTENTION · Une raison négative

Le programme de maths complémentaires ne parle que des raisons **positives** : c'est ce qu'on te demandera. Mais la règle telle qu'elle est écrite ci-dessus reste vraie pour une raison entre -1 et 0 : $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ fait $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \ldots$ et tend bien vers 0, en changeant de signe à chaque terme.

Ce qui change vraiment, c'est $q \leqslant -1$: $(-2)^n$ fait $1,\ -2,\ 4,\ -8,\ 16,\ \ldots$ et n'a **aucune limite**, ni $+\infty$ ni $-\infty$. Une raison négative ne donne jamais $-\infty$.

4. Encadrer pour conclure : le théorème des gendarmes

Quand un morceau oscille sans limite ($(-1)^n$, $\cos(n)$, $\sin(n)$), les opérations ne servent plus à rien : on ne peut pas écrire « la limite de $(-1)^n$ », elle n'existe pas. On ne calcule pas sa limite, on l'**encadre**.

À RETENIR · LE THÉORÈME DES GENDARMES

Si, pour tout n, on a $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, et si v_n et w_n tendent vers la **même** limite ℓ, alors u_n tend aussi vers ℓ.

Les deux gendarmes se resserrent vers ℓ ; celui du milieu n'a pas le choix. On dit aussi « par encadrement ».

Méthode. 1. Écrire l'encadrement de base : $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, et pareil pour $\cos(n)$ et $\sin(n)$. 2. Le transformer jusqu'à retrouver u_n au milieu : ajouter un nombre, multiplier ou diviser par un nombre **positif** garde le sens des inégalités. 3. Calculer la limite des deux bornes. 4. Si elles sont égales, conclure : « par le théorème des gendarmes, $\lim u_n = \ell$ ».

ATTENTION · Le piège du signe

Multiplier ou diviser par un nombre **négatif** retourne les inégalités. Avant chaque multiplication, écris le signe du facteur : $\sqrt{n+1} > 0$, $n^2 > 0$, mais $-3 < 0$.

Avec $0 \leqslant x \leqslant 1$, multiplier par -3 donne $0 \geqslant -3x \geqslant -3$, c'est-à-dire $-3 \leqslant -3x \leqslant 0$. Sans retourner, on écrirait $0 \leqslant -3x \leqslant -3$, ce qui est impossible puisque $0 > -3$.

Exemple résolu. Limite de $u_n = 2 + \dfrac{\sin(n)}{n}$, pour $n \geqslant 1$.

1. Pour tout n : $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$.

2. On divise par n, qui est positif, le sens ne change pas : $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\sin(n)}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$. On ajoute 2 : $2 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 2 + \dfrac{1}{n}$.

3. $\lim \left(2 - \dfrac{1}{n}\right) = 2$ et $\lim \left(2 + \dfrac{1}{n}\right) = 2$, puisque $\lim \dfrac{1}{n} = 0$.

4. Les deux bornes ont la même limite.

Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

5. Conjecturer à la calculatrice

Certaines suites n'entrent dans aucune des situations précédentes. C'est souvent le cas d'une suite définie **par récurrence**, où chaque terme se calcule à partir du précédent, comme $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$: on ne sait pas écrire u_n en fonction de n, donc les règles des parties 2 à 4 ne s'appliquent pas. On calcule alors des termes de rang de plus en plus grand pour **conjecturer** la limite, c'est-à-dire la deviner sans la démontrer.

Méthode. 1. Faire calculer les termes, avec le mode suite de la calculatrice ou avec un tableur : on écrit u_0 dans la cellule A1, la formule qui donne le terme suivant dans A2 (elle utilise A1), puis on recopie vers le bas. La cellule A11 contient alors u_{10}, la cellule A101 contient u_{100}. 2. Lire u_{10}, u_{100}, u_{1000} et regarder de quel nombre ils se rapprochent. 3. Rédiger la réponse comme une conjecture : « il semble que… ».

Exemple résolu. $u_0 = 5$ et, pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Conjecturer la limite de (u_n).

1. Au tableur : 5 dans A1, la formule `=RACINE(A1+2)` dans A2, puis on recopie vers le bas.

2. On lit $u_1 \approx 2{,}6458$, $u_2 \approx 2{,}1554$, $u_3 \approx 2{,}0385$, puis $u_{10} \approx 2{,}000\,002$. Pour u_{100} et u_{1000}, l'affichage donne 2.

3. Les termes se rapprochent de 2. On peut vérifier que 2 est cohérent : si un terme vaut 2, le suivant vaut $\sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$, la suite ne bouge plus.

Il semble que la suite (u_n) converge vers 2.

ATTENTION · Une conjecture n'est pas une preuve

La calculatrice arrondit : quand elle affiche 2 pour u_{100}, cela ne veut pas dire que $u_{100} = 2$, seulement que u_{100} est très proche de 2. Écris toujours « il semble que », jamais « donc $\lim u_n = 2$ », tant que tu n'as pas de démonstration.

3 Exercices types

Six exercices corrigés, du plus simple au plus difficile : les opérations, les formes indéterminées, les suites géométriques, puis l'encadrement.

Exercice 1 OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes, définies pour tout entier $n \geqslant 1$.

1. $u_n = \dfrac{6 + \dfrac{1}{n}}{2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$ 2. $v_n = \dfrac{7}{\sqrt{n} + 2}$ 3. $w_n = \dfrac{5 - n^2}{4}$

CORRECTION

1.

Au numérateur : $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ (un nombre sur ∞), donc $\lim \left(6 + \dfrac{1}{n}\right) = 6$.

Au dénominateur : $\lim \sqrt{n} = +\infty$, donc $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim \left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2$.

Quotient de deux nombres, avec un dénominateur qui ne tend pas vers 0 : $\dfrac{6}{2} = 3$.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 3$$

2.

$\lim \sqrt{n} = +\infty$, donc $\lim (\sqrt{n} + 2) = +\infty$. Un nombre sur ∞ : $\dfrac{7}{\infty}$ donne 0.

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$$

3.

$\lim n^2 = +\infty$, donc $\lim \left(5 - n^2\right) = -\infty$ (un nombre moins $+\infty$). On divise par 4, un nombre positif : $\dfrac{-\infty}{4} = -\infty$.

$$\lim_{n \to +\infty} w_n = -\infty$$

Exercice 2 FORME INDÉTERMINÉE DANS UN QUOTIENT

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes, définies pour tout entier $n \geqslant 1$.

1. $u_n = \dfrac{2n^2 - n}{5n^2 + 3}$ 2. $v_n = \dfrac{n + 4}{n^2 + 1}$

CORRECTION

1.

Au numérateur, $2n^2 - n$ donne déjà $(+\infty) - (+\infty)$; au dénominateur, $\lim\left(5n^2 + 3\right) = +\infty$. Forme indéterminée : on factorise par le terme dominant, n^2, en haut et en bas.

$$2n^2 - n = n^2\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

$$5n^2 + 3 = n^2\left(5 + \frac{3}{n^2}\right)$$

On simplifie par n^2, qui n'est pas nul :

$$u_n = \frac{n^2\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{n^2\left(5 + \frac{3}{n^2}\right)}$$

$$u_n = \frac{2 - \frac{1}{n}}{5 + \frac{3}{n^2}}$$

$\lim \frac{1}{n} = 0$ et $\lim \frac{3}{n^2} = 0$: le numérateur tend vers 2, le dénominateur vers 5.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{5}$$

2.

$\lim(n + 4) = +\infty$ et $\lim\left(n^2 + 1\right) = +\infty$: forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. Le terme dominant est n en haut et n^2 en bas.

$$n + 4 = n\left(1 + \frac{4}{n}\right)$$

$$n^2 + 1 = n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

On simplifie par n :

$$v_n = \frac{n\left(1 + \frac{4}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}$$

$$v_n = \frac{1 + \frac{4}{n}}{n\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}$$

Le numérateur tend vers 1. Au dénominateur, $\lim n = +\infty$ et $\lim\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1$, donc le produit tend vers $+\infty$. Un nombre sur ∞ donne 0.

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

Quand le dénominateur grandit plus vite que le numérateur, le quotient tend vers 0.

Exercice 3 FORME INDÉTERMINÉE AVEC UNE RACINE

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = n - 4\sqrt{n}$.

CORRECTION

1.

$\lim n = +\infty$ et $\lim 4\sqrt{n} = +\infty$: la différence donne $(+\infty) - (+\infty)$, forme indéterminée.

2.

Le terme dominant est n, qui grandit plus vite que $\sqrt{n}$. Pour factoriser par n, on a besoin de $\dfrac{\sqrt{n}}{n}$. Comme $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$:

$$\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Donc :

$$u_n = n\left(1 - \frac{4\sqrt{n}}{n}\right)$$

$$u_n = n\left(1 - \frac{4}{\sqrt{n}}\right)$$

3.

$\lim \sqrt{n} = +\infty$, donc $\lim \dfrac{4}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim \left(1 - \dfrac{4}{\sqrt{n}}\right) = 1$. Avec $\lim n = +\infty$, le produit donne $(+\infty) \times 1 = +\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Les premiers termes ne le laissent pas deviner : $u_4 = 4 - 8 = -4$. Mais $u_{10\,000} = 10\,000 - 400 = 9600$. La limite ne regarde que les grands rangs.

Exercice 4 SUITE GÉOMÉTRIQUE ET OPÉRATIONS

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes, définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ (l'ensemble des entiers naturels 0, 1, 2…).

1. $a_n = 6 - 2 \times 0{,}8^n$ **2.** $b_n = 10 - 0{,}5 \times 1{,}2^n$

CORRECTION

1.

On a $-1 < 0{,}8 < 1$, donc $\lim 0{,}8^n = 0$. Puis $\lim (2 \times 0{,}8^n) = 2 \times 0 = 0$.

Par somme : $6 - 0 = 6$.

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 6$$

2.

On a $1{,}2 > 1$, donc $\lim 1{,}2^n = +\infty$. On multiplie par $0{,}5$, un nombre positif : $\lim (0{,}5 \times 1{,}2^n) = +\infty$.

Par somme : un nombre moins $+\infty$, soit $10 - (+\infty) = -\infty$.

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = -\infty$$

Exercice 5 THÉORÈME DES GENDARMES

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{2 - \sin(n)}{\sqrt{n}}$.

CORRECTION

1.

$\sin(n)$ oscille sans limite : on encadre. Pour tout n :

$$-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$$

2.

On multiplie par -1, un nombre **négatif** : le sens des inégalités se retourne.

$$1 \geqslant -\sin(n) \geqslant -1$$

soit, en remettant dans l'ordre :

$$-1 \leqslant -\sin(n) \leqslant 1$$

3.

On ajoute 2 :

$$1 \leqslant 2 - \sin(n) \leqslant 3$$

4.

On divise par $\sqrt{n}$, qui est positif, le sens ne change pas :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{\sqrt{n}}$$

5.

$\lim \sqrt{n} = +\infty$, donc $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim \dfrac{3}{\sqrt{n}} = 0$. Les deux bornes ont la même limite.

Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exercice 6 ENCADREMENT PUIS FORME INDÉTERMINÉE

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{n + 3}$.

CORRECTION

1.

$(-1)^n$ n'a pas de limite : on encadre. Pour tout n :

$$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$$

2.

On ajoute $2n$:

$$2n - 1 \leqslant 2n + (-1)^n \leqslant 2n + 1$$

3.

On divise par $n + 3$, qui est positif, le sens ne change pas :

$$\frac{2n - 1}{n + 3} \leqslant u_n \leqslant \frac{2n + 1}{n + 3}$$

4.

Les deux bornes donnent $\dfrac{\infty}{\infty}$: on factorise par n en haut et en bas, puis on simplifie par n.

$$\frac{2n-1}{n+3} = \frac{n\left(2-\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}$$

$$\frac{2n-1}{n+3} = \frac{2-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{3}{n}}$$

Le numérateur tend vers 2, le dénominateur vers 1 : la borne de gauche tend vers 2. De même :

$$\frac{2n+1}{n+3} = \frac{2+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{3}{n}}$$

et la borne de droite tend aussi vers 2.

5.

Les deux bornes ont la même limite.

Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

4 À toi de jouer

Six exercices pour t'entraîner seul. Cherche d'abord sans regarder : les réponses sont regroupées en fin de fiche, et elles ne servent qu'à vérifier.

Les réponses sont à la fin de la fiche, dans « Réponses des devoirs ». Cherche d'abord, vérifie ensuite.

Exercice 1 du devoir. Déterminer la limite de chacune des suites suivantes, définies pour tout entier $n \geqslant 1$.

1. $u_n = 3 - \dfrac{8}{n^2}$ 2. $v_n = -2n^3 + \dfrac{1}{n}$ 3. $w_n = \dfrac{9 - \dfrac{1}{n}}{3 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}}$

Exercice 2 du devoir. Déterminer la limite de chacune des suites suivantes, définies pour tout entier $n \geqslant 1$.

1. $u_n = 4n - n^2$ 2. $v_n = \dfrac{6n+5}{2n-1}$ 3. $w_n = \dfrac{n^2+n}{3n+2}$

Exercice 3 du devoir. Déterminer la limite de chacune des suites suivantes, définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. $u_n = 50 \times 0{,}6^n$ 2. $v_n = 7 - 0{,}1 \times 2^n$ 3. $w_n = 4 + 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

Exercice 4 du devoir. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{5 + 2\cos(n)}{n}$.

Exercice 5 du devoir. Déterminer la limite de la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = \dfrac{3n - \sin(n)}{n+1}$.

Exercice 6 du devoir. On pose $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. Calculer u_1 (valeur exacte), puis, à la calculatrice ou au tableur, une valeur approchée de u_{10} et de u_{100}.

2. Conjecturer la limite de (u_n).

Réponses des devoirs

À ne regarder qu'après avoir cherché, et à comparer avec ta rédaction : la réponse seule ne suffit pas en contrôle, c'est la justification qui compte.

Réponses des exercices de « À toi de jouer ».

Exercice 1 du devoir : 1. $\lim u_n = 3$, car $\dfrac{8}{n^2} \to 0$. 2. $\lim v_n = -\infty$, car $-2n^3 \to -\infty$ et $\dfrac{1}{n} \to 0$. 3. $\lim w_n = 3$: le numérateur tend vers 9, le dénominateur vers 3.

Exercice 2 du devoir : 1. $u_n = n^2\left(\dfrac{4}{n} - 1\right)$ et $\dfrac{4}{n} - 1 \to -1$, donc $\lim u_n = -\infty$. 2. $v_n = \dfrac{6 + \dfrac{5}{n}}{2 - \dfrac{1}{n}}$, donc $\lim v_n = \dfrac{6}{2} = 3$. 3. $w_n = \dfrac{n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}{3 + \dfrac{2}{n}}$: le numérateur tend vers $+\infty$ et le dénominateur vers 3, donc $\lim w_n = +\infty$.

Exercice 3 du devoir : 1. $-1 < 0{,}6 < 1$, donc $0{,}6^n \to 0$ et $\lim u_n = 0$. 2. $2 > 1$, donc $0{,}1 \times 2^n \to +\infty$ et $\lim v_n = -\infty$. 3. $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, donc $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \to 0$ et $\lim w_n = 4$.

Exercice 4 du devoir : De $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ on tire $3 \leqslant 5 + 2\cos(n) \leqslant 7$, puis $\dfrac{3}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{7}{n}$. Les deux bornes tendent vers 0 : par le théorème des gendarmes, $\lim u_n = 0$.

Exercice 5 du devoir : De $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ on tire $-1 \leqslant -\sin(n) \leqslant 1$ (multiplication par -1, on retourne), puis $\dfrac{3n-1}{n+1} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{3n+1}{n+1}$. En factorisant par n, les deux bornes tendent vers 3 : par le théorème des gendarmes, $\lim v_n = 3$.

Exercice 6 du devoir : 1. $u_1 = \sqrt{7} \approx 2{,}6458$; $u_{10} \approx 3{,}9998$; la calculatrice affiche 4 pour u_{100}. 2. Il semble que (u_n) converge vers 4. C'est cohérent : $\sqrt{3 \times 4 + 4} = \sqrt{16} = 4$.