



La trigonométrie dans le triangle rectangle

3e

Mathématiques

Fiche de cours

DANS CETTE FICHE

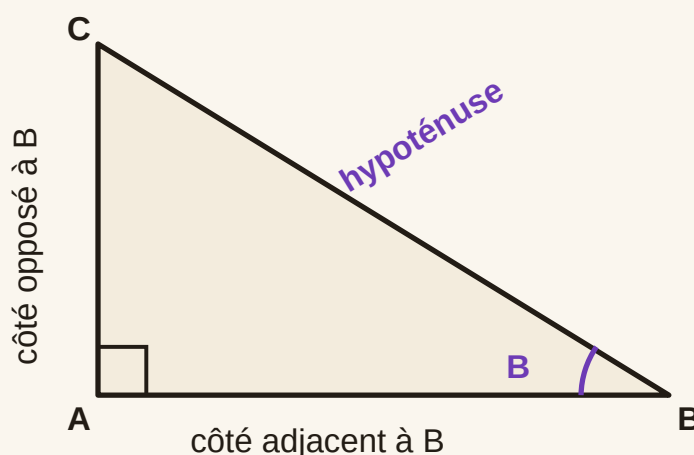
1 L'essentiel du cours	1
2 Exercices types — de la longueur au problème	7
3 À toi de jouer	8
Réponses des devoirs	9

1 L'essentiel du cours

Au collège, dans un **triangle rectangle**, on a deux outils principaux : le **théorème de Pythagore**, qui relie les longueurs des trois côtés, et la **trigonométrie**, qui relie un angle et les côtés. Cette fiche traite de la trigonométrie, qui permet de :

1. calculer une longueur à partir d'un **angle** (autre que l'angle droit) et d'un **côté** ;
2. calculer un angle à partir de **deux longueurs**.

1.1 Le vocabulaire : hypoténuse, adjacent, opposé



Le triangle ABC est rectangle en A . On s'intéresse à l'angle $\widehat{B}$.

- L'**hypoténuse** est $[BC]$: le côté en face de l'angle droit. C'est toujours le plus long.
- Le côté **adjacent** à $\widehat{B}$ est $[AB]$: il touche l'angle $\widehat{B}$ (sans être l'hypoténuse).
- Le côté **opposé** à $\widehat{B}$ est $[AC]$: il est en face de l'angle $\widehat{B}$.

ATTENTION · Adjacent et opposé dépendent de l'angle choisi

Seule l'hypoténuse ne change jamais. Si on choisit l'angle $\widehat{C}$ à la place de $\widehat{B}$, alors $[AB]$ devient le côté **opposé** et $[AC]$ le côté **adjacent**. Avant toute formule, on dit toujours : « je travaille avec quel angle ? »

1.2 Les trois formules

À RETENIR · COSINUS, SINUS, TANGENTE

Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu $\widehat{B}$:

$$\cos \widehat{B} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \quad \sin \widehat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \quad \tan \widehat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

Pour ne pas les mélanger : retiens le mot **CAH SOH TOA**. Cosinus = Adjacent sur Hypoténuse, Sinus = Opposé sur Hypoténuse, Tangente = Opposé sur Adjacent.

ATTENTION · Trois pièges classiques

- Ces formules ne marchent que dans un triangle **rectangle**.
- Le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont toujours **compris entre 0 et 1** (un côté n'est jamais plus long que l'hypoténuse). Si ta calculatrice donne 1,4, c'est que tu as inversé la fraction.
- La calculatrice doit être en **mode degré** (DEG ou D à l'écran). En mode radian, tous tes résultats sont faux.

2. Ce que l'on te demande en contrôle

En contrôle, on te demande presque toujours l'une de ces deux choses :

1. calculer une **longueur** dans un triangle rectangle à partir d'un **angle** (autre que l'angle droit) et d'un **côté** ;
2. calculer un **angle** à partir de **deux longueurs**.

2.1 Calculer une longueur à partir d'un angle et d'un côté

À RETENIR · LA MÉTHODE EN QUATRE ÉTAPES

1. Repérer l'angle donné, puis nommer l'hypoténuse, l'adjacent et l'opposé.
2. Choisir la formule qui contient **le côté connu et le côté cherché**.
3. Écrire l'égalité, puis isoler l'inconnue.
4. Calculer, arrondir, et écrire l'unité.

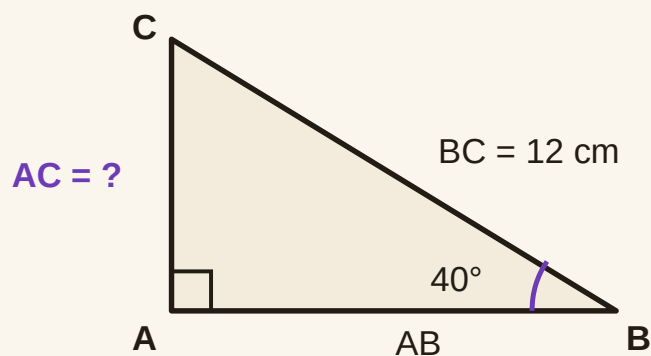
Exemple 1. ABC est rectangle en A , $\widehat{B} = 40^\circ$ et $BC = 12$ cm. Calculer AC .

On connaît l'hypoténuse BC et on cherche le côté opposé AC : c'est le **sinus**.

$$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} \quad \text{donc} \quad \sin 40^\circ = \frac{AC}{12}$$

$$AC = 12 \times \sin 40^\circ$$

$$AC \approx 7,7 \text{ cm}$$

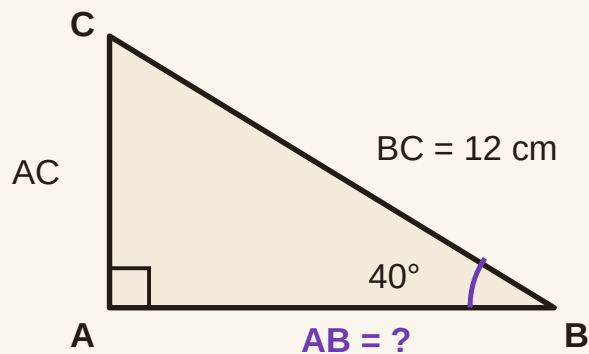


Exemple 2. Même triangle. Calculer AB .

On connaît l'hypoténuse et on cherche le côté adjacent : c'est le **cosinus**.

$$\cos 40^\circ = \frac{AB}{12} \quad \text{donc} \quad AB = 12 \times \cos 40^\circ$$

$$AB \approx 9,2 \text{ cm}$$



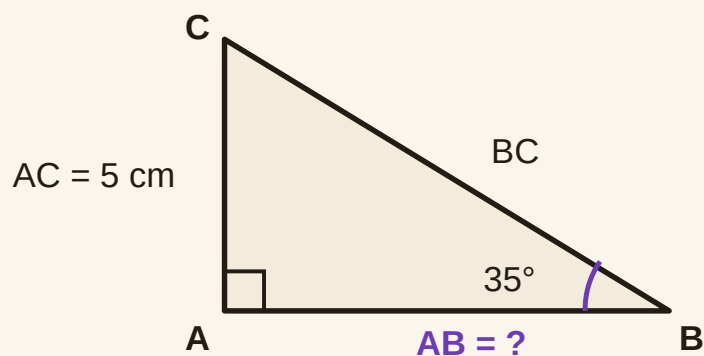
Exemple 3 — quand l'inconnue est en bas. ABC est rectangle en A , $\widehat{B} = 35^\circ$ et $AC = 5 \text{ cm}$. Calculer AB .

On connaît le côté opposé AC et on cherche l'adjacent AB : c'est la **tangente**.

$$\tan 35^\circ = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan 35^\circ = \frac{5}{AB} \quad \text{donc} \quad AB = \frac{5}{\tan 35^\circ}$$

$$AB \approx 7,1 \text{ cm}$$



ATTENTION · Inconnue au numérateur ou au dénominateur

Dans l'exemple 1, l'inconnue est en haut de la fraction : on **multiplie** ($AC = 12 \times \sin 40^\circ$).

Dans l'exemple 3, elle est en bas : on **divise** ($AB = 5 \div \tan 35^\circ$). C'est l'erreur la plus fréquente : multiplier 5 par $\tan 35^\circ$ donne 3,5 cm, alors que AB est plus long que AC puisque l'angle en B est plus petit que 45° .

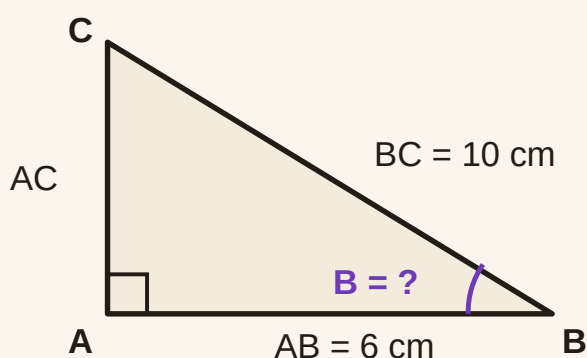
2.2 Calculer un angle à partir de deux longueurs

Ici, on connaît deux longueurs (deux côtés) et on cherche l'angle. On choisit la formule qui contient ces deux côtés, on écrit l'égalité comme avant, puis on utilise la touche $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$ ou $\tan^{-1}$ de la calculatrice (souvent en appuyant d'abord sur « 2nde » ou « shift »). Selon les modèles, ces touches s'appellent aussi **arccos**, **arcsin** et **arctan**.

Exemple 4. ABC est rectangle en A , $AB = 6$ cm et $BC = 10$ cm. Calculer $\widehat{B}$.

On connaît l'adjacent et l'hypoténuse : c'est le **cosinus**.

$$\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC}$$
$$\cos \widehat{B} = \frac{6}{10} \quad \text{donc} \quad \widehat{B} = \cos^{-1}(0,6)$$
$$\widehat{B} \approx 53^\circ$$



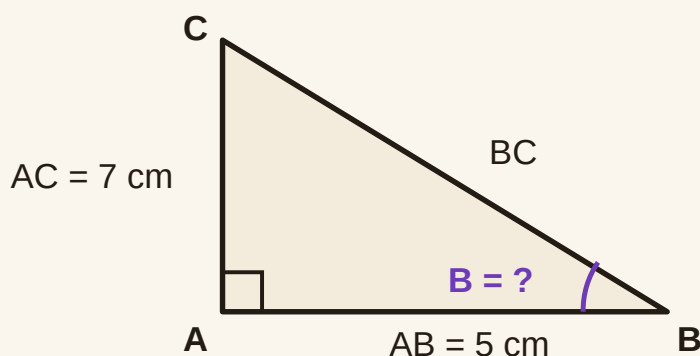
Exemple 5. ABC est rectangle en A , $AC = 7$ cm et $AB = 5$ cm. Calculer $\widehat{B}$.

On connaît l'opposé et l'adjacent : c'est la **tangente**.

$$\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan \widehat{B} = \frac{7}{5} \quad \text{donc} \quad \widehat{B} = \tan^{-1}(1,4)$$

$$\widehat{B} \approx 54^\circ$$



À RETENIR · L'AUTRE ANGLE, GRATUITEMENT

Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus ont pour somme 90° . Une fois $\widehat{B}$ trouvé, $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B}$: inutile de refaire de la trigonométrie.

3. Pythagore ou trigonométrie ?

Les deux méthodes vivent dans le triangle rectangle. Pour choisir, regarde ce que l'énoncé te donne :

- **deux côtés** connus et le troisième cherché : **Pythagore** ;
- **un angle et un côté** pour trouver une longueur, ou **deux côtés** pour trouver un angle : **trigonométrie**.

Pour vérifier ton résultat : dans l'exemple 1 et 2, on trouve $AC \approx 7,7$ et $AB \approx 9,2$. Avec Pythagore, $7,7^2 \approx 59,3$ et $9,2^2 \approx 84,6$, donc $7,7^2 + 9,2^2 \approx 143,9$, alors que $12^2 = 144$. Les deux méthodes se recoupent.

2 Exercices types — de la longueur au problème

Trois séries. La correction suit chaque exercice : cherche d'abord, vérifie ensuite.

Niveau 1 — un angle et un côté **À FAIRE**

1. RST est rectangle en S , $\widehat{R} = 32^\circ$ et $RT = 15$ cm. Calculer ST .
2. UVW est rectangle en V , $\widehat{U} = 65^\circ$ et $UV = 4$ cm. Calculer VW .

CORRECTION

1. RT est l'hypoténuse et ST l'opposé de $\widehat{R}$: $\sin 32^\circ = \frac{ST}{15}$, donc $ST = 15 \times \sin 32^\circ$, soit $ST \approx 7,9$ cm.
2. UV est l'adjacent et VW l'opposé de $\widehat{U}$: $\tan 65^\circ = \frac{VW}{4}$, donc $VW = 4 \times \tan 65^\circ$, soit $VW \approx 8,6$ cm.

Niveau 2 — un angle à trouver **À FAIRE**

XYZ est rectangle en Y , $XY = 5$ cm et $XZ = 13$ cm.

1. Calculer $\widehat{X}$.
2. En déduire $\widehat{Z}$.

CORRECTION

1. XY est l'adjacent de $\widehat{X}$ et XZ l'hypoténuse : c'est le cosinus. $\cos \widehat{X} = \frac{5}{13}$, donc $\widehat{X} = \cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$, soit $\widehat{X} \approx 67^\circ$.
2. $\widehat{Z} = 90^\circ - 67^\circ$, soit $\widehat{Z} = 23^\circ$.

Niveau 3 — deux problèmes **À FAIRE**

1. Une échelle de 4 m est appuyée contre un mur. Elle fait un angle de 70° avec le sol. À quelle hauteur du sol touche-t-elle le mur ? À quelle distance du mur est son pied ? (arrondir au dixième de mètre)
2. Une rampe d'accès mesure 6 m de long et monte de 0,5 m. Quel angle fait-elle avec le sol ? (arrondir au dixième de degré)

CORRECTION

1. L'échelle est l'hypoténuse (4 m). La hauteur est le côté opposé à l'angle au sol : $\sin 70^\circ = \frac{h}{4}$, donc $h = 4 \times \sin 70^\circ$, soit $h \approx 3,8$ m. La distance au mur est le côté adjacent : $d = 4 \times \cos 70^\circ$, soit $d \approx 1,4$ m.

2. La rampe est l'hypoténuse (6 m) et la hauteur gagnée le côté opposé (0,5 m) : $\sin \alpha = \frac{0,5}{6}$, donc $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{0,5}{6}\right)$, soit $\alpha \approx 4,8^\circ$.

3 À toi de jouer

Chaque triangle est rectangle. Écris toujours l'égalité (cosinus, sinus ou tangente) avant de calculer. Longueurs arrondies au dixième, angles arrondis au degré. Les réponses sont en fin de fiche.

Les réponses sont à la fin de la fiche, dans « Réponses des devoirs ». Cherche d'abord, vérifie ensuite.

1. DEF est rectangle en E , $\widehat{D} = 50^\circ$ et $DF = 9$ cm. Calculer EF , puis DE .

2. GHI est rectangle en H , $\widehat{G} = 28^\circ$ et $GH = 8$ cm. Calculer HI , puis GI .

3. JKL est rectangle en K , $JK = 4,5$ cm et $JL = 9$ cm. Calculer $\widehat{J}$.

4. MNP est rectangle en N , $MN = 6$ cm et $NP = 8$ cm. Calculer $\widehat{M}$, puis $\widehat{P}$.

Réponses des devoirs

À ne regarder qu'après avoir cherché, et à comparer avec ta rédaction : la réponse seule ne suffit pas en contrôle, c'est la justification qui compte.

Réponses des exercices de « À toi de jouer ».

1. réponse attendue : DF est l'hypoténuse. EF est l'opposé : $\sin 50^\circ = \frac{EF}{9}$, donc $EF = 9 \times \sin 50^\circ$, soit $EF \approx 6,9$ cm. DE est l'adjacent : $DE = 9 \times \cos 50^\circ$, soit $DE \approx 5,8$ cm.
2. réponse attendue : GH est l'adjacent. HI est l'opposé : $\tan 28^\circ = \frac{HI}{8}$, donc $HI = 8 \times \tan 28^\circ$, soit $HI \approx 4,3$ cm. GI est l'hypoténuse : $\cos 28^\circ = \frac{8}{GI}$, donc $GI = \frac{8}{\cos 28^\circ}$, soit $GI \approx 9,1$ cm.
3. réponse attendue : adjacent et hypoténuse, donc le cosinus. $\cos \hat{J} = \frac{4,5}{9}$, soit $\cos \hat{J} = 0,5$, donc $\hat{J} = \cos^{-1}(0,5)$, soit $\hat{J} = 60^\circ$.
4. réponse attendue : NP est l'opposé de $\widehat{M}$ et MN son adjacent, donc la tangente. $\tan \widehat{M} = \frac{8}{6}$, donc $\widehat{M} = \tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right)$, soit $\widehat{M} \approx 53^\circ$. Puis $\widehat{P} = 90^\circ - \widehat{M}$, soit $\widehat{P} \approx 37^\circ$.