



L'ensemble de définition d'une fonction

2de · 1re

Mathématiques

Fiche de cours

DANS CETTE FICHE

1 L'essentiel du cours	1
2 À toi de jouer	6
Réponses des devoirs	7

1 L'essentiel du cours

Avant d'utiliser une fonction, il faut savoir sur quels nombres elle a le droit de travailler. C'est tout l'objet de ce rappel.

Une fonction, c'est une **machine** : on lui donne un nombre x , elle rend son **image** $f(x)$. Mais certaines machines refusent certains nombres. Sur ta calculatrice, « $1 \div 0$ » ou « $\sqrt{-3}$ » affichent une **erreur** : ces nombres n'ont pas d'image.

Pourquoi le chercher ? C'est la **première étape** quand on étudie une fonction : avant de calculer une image, de résoudre une équation, de dresser un tableau de variations ou de tracer la courbe, on précise sur quels nombres on a le droit de travailler. Sur le dessin, **la courbe n'existe que pour les x de $\mathcal{D}_f$** : un nombre interdit, c'est un trou dans la courbe.

À RETENIR · DÉFINITION

L'**ensemble de définition** d'une fonction f , noté $\mathcal{D}_f$, est l'ensemble des réels qui **ont une image** par f .

À RETENIR · QUE REGARDER DANS LA FORMULE ?

Deux situations seulement posent problème : une **division** et une **racine**. Le reste du temps, aucun réel n'est interdit.

Que vois-tu dans $f(x)$?	Ce qui est interdit	Exemple
Ni fraction ni racine	rien : tous les réels	$3x + 5 : \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
x dans un dénominateur	le dénominateur ne doit pas être 0	$\frac{1}{x} : x \neq 0$
x sous une racine carrée	ce qu'il y a sous la racine doit être ≥ 0	$\sqrt{x} : x \geq 0$

1. Une fonction affine : aucun nombre interdit

Quand l'utiliser : quand la fonction n'a **ni fraction ni racine**. Il n'y a rien à interdire.

$f(x) = 3x + 5$. Je peux remplacer x par tous les réels que je veux :

$$f(0) = 3 \times 0 + 5 \quad \text{donc} \quad f(0) = 5$$

$$f(-10) = 3 \times (-10) + 5 \quad \text{donc} \quad f(-10) = -25$$

$$f(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} + 5$$

$$f\left(\frac{1}{7}\right) = 3 \times \frac{1}{7} + 5$$

$$f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{3}{7} + \frac{35}{7}$$

$$f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{38}{7}$$

Aucun réel n'est interdit, donc :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

ou, en intervalle :

$$\mathcal{D}_f =]-\infty ; +\infty[$$

2. La fonction inverse : le zéro interdit

Quand l'utiliser : dès qu'il y a une division par x : on doit toujours vérifier que le dénominateur ne s'annule pas.

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \quad f(\sqrt{7}) = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$f(-3) = \frac{1}{-3} \quad \text{donc} \quad f(-3) = -\frac{1}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{\frac{1}{5}}$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = 1 \times \frac{5}{1}$$

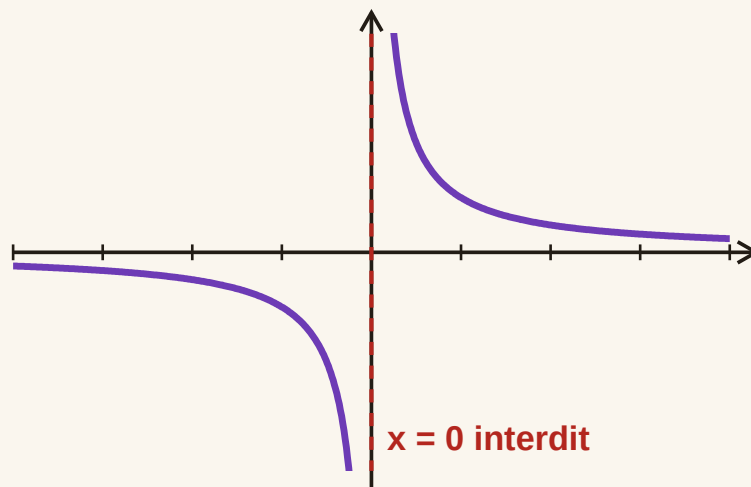
$$f\left(\frac{1}{5}\right) = 5$$

Mais $f(0) = \frac{1}{0}$ n'existe pas : 0 **n'a pas d'image**. Tous les réels sont donc autorisés, sauf lui :

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

qu'on note aussi :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$$



3. Un quotient quelconque

Quand l'utiliser : dès que x (ou une expression avec x) est **au dénominateur**.

$$f(x) = \frac{x-5}{x+3}.$$

$$f(1) = \frac{1-5}{1+3} \quad \text{donc} \quad f(1) = -1$$

$$f(5) = \frac{5-5}{5+3} \quad \text{donc} \quad f(5) = 0$$

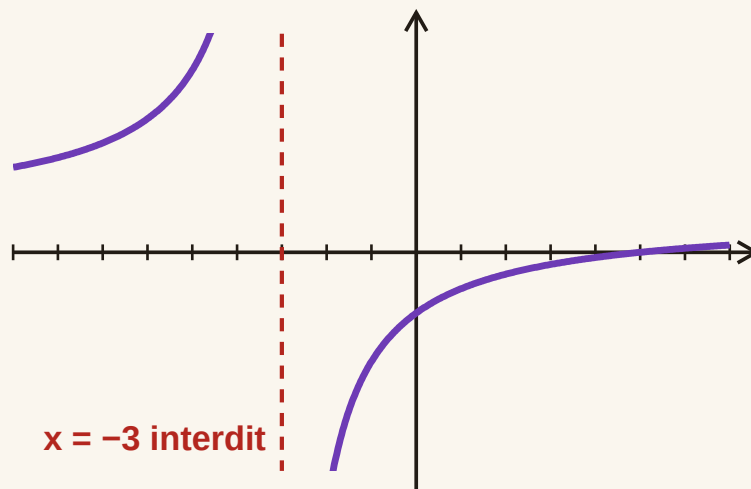
$$f(-3) = \frac{-3-5}{-3+3} \quad \text{donc} \quad f(-3) = \frac{-8}{0} \quad \text{impossible}$$

Donc -3 n'a pas d'image :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

c'est-à-dire, en intervalles :

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[$$



Remarque. Dans la pratique, on ne s'amuse pas à « tester » les nombres un par un. On cherche directement ce qui est *interdit* : pour $f(x) = \frac{x-5}{x+3}$, il faut que $x+3 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -3$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

À RETENIR · LE RÉFLEXE DU QUOTIENT

Si $f(x) = \frac{u}{v}$, il faut : $v \neq 0$.

4. La racine carrée : pas de négatif dessous

Quand l'utiliser : dès que x (ou une expression avec x) est **sous une racine carrée**.

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

$$f(0) = \sqrt{0} \quad \text{donc} \quad f(0) = 0$$

$$f(1) = \sqrt{1} \quad \text{donc} \quad f(1) = 1$$

$$f(25) = \sqrt{25} \quad \text{donc} \quad f(25) = 5$$

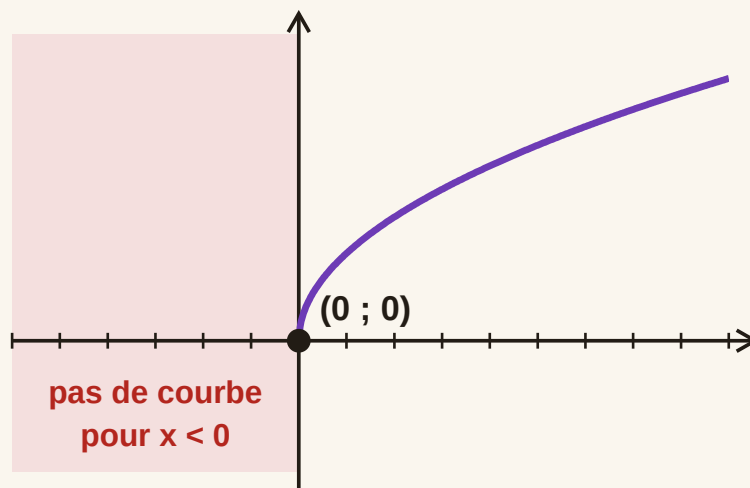
$$f(-3) = \sqrt{-3} \quad \text{impossible}$$

Il faut $x \geq 0$, donc :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$$

ou, en intervalle :

$$\mathcal{D}_f = [0 ; +\infty[$$



À RETENIR · LE RÉFLEXE DE LA RACINE

Si $f(x) = \sqrt{u}$, il faut : $u \geq 0$.

② À toi de jouer

Déterminer l'ensemble de définition de chacune de ces trois fonctions. On ne teste pas les nombres un par un : on cherche ce qui est interdit. Les réponses sont en fin de fiche.

Les réponses sont à la fin de la fiche, dans « Réponses des devoirs ». Cherche d'abord, vérifie ensuite.

1. $f(x) = -4x + 5$

2. $f(x) = \frac{x}{x-4}$

3. $f(x) = \sqrt{x-4}$

Réponses des devoirs

À ne regarder qu'après avoir cherché, et à comparer avec ta rédaction : la réponse seule ne suffit pas en contrôle, c'est la justification qui compte.

Réponses des exercices de « À toi de jouer ».

1. réponse attendue : ni quotient ni racine, aucun réel n'est interdit ; $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. réponse attendue : quotient, il faut $x - 4 \neq 0$, donc $x \neq 4$; $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.
3. réponse attendue : racine, il faut $x - 4 \geq 0$, donc $x \geq 4$; $\mathcal{D}_f = [4; +\infty[$. Le 4 est cette fois autorisé, puisque $\sqrt{0} = 0$.