Intervalles, intersection et réunion

2de Mathématiques Fiche de cours

DANS CETTE FICHE

1 L'essentiel du cours 1
2 Exercices types 7
3 À toi de jouer 12
Réponses des devoirs 14

1 L'essentiel du cours

Un **intervalle** est un morceau de la droite graduée : tous les réels compris entre deux bornes. Ce chapitre répond à trois questions : comment l'écrire (point A), ce que deux intervalles ont en commun, avec ∩ (point B), et ce qu'ils forment ensemble, avec ∪ (point C). Le point D les relie aux ensembles de nombres du chapitre « Les ensembles de nombres ».

Ce que je vois	Ce que je fais
Un intervalle à lire, ou une inégalité à traduire $[-6\,;2[\ ;\ -1 < x \leq 4$	Je regarde chaque crochet : tourné vers l'intérieur = borne comprise, tourné vers l'extérieur = borne exclue (point A).
Un nombre et un intervalle, avec $\in$ ou $\notin$ $2 \in]2\,;5[$?	Je compare le nombre aux deux bornes, puis je regarde si la borne en cause est comprise (point A).
$I \cap J$, se lit « I inter J », c'est « et » $[0\,;3] \cap [2\,;7]$	Je garde les nombres qui sont dans les deux : je dessine les deux intervalles l'un sous l'autre et je lis la partie commune (point B).
$I \cup J$, se lit « I union J », c'est « ou » $[0\,;3] \cup [2\,;7]$	Je garde les nombres qui sont dans l'un ou dans l'autre : un seul morceau si les deux se chevauchent ou se touchent sans trou, deux morceaux sinon (point C).
$\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ avec un intervalle $\mathbb{Z} \cap [-2\,;1]$	J'écris les entiers qui sont dans l'intervalle, entre accolades, du plus petit au plus grand (point D).
Rien de tout ça	Je dessine ce que dit l'énoncé sur une droite graduée, et je lis la réponse sur le dessin.

A. Lire et écrire un intervalle

À RETENIR · LE SENS DU CROCHET

Un crochet tourné vers l'**intérieur** de l'intervalle : la borne est **comprise** (inégalité large, $\leq$ ou $\geq$).

Un crochet tourné vers l'**extérieur** : la borne est **exclue** (inégalité stricte, $<$ ou $>$).

Devant $+\infty$ et $-\infty$, le crochet est **toujours tourné vers l'extérieur** : l'infini n'est pas un nombre, on ne l'atteint jamais.

Intervalle	Inégalité	Borne(s)
$[a\,;b]$	$a \leq x \leq b$	les deux comprises
$]a\,;b[$	$a < x < b$	les deux exclues
$[a\,;b[$	$a \leq x < b$	a comprise, b exclue
$]a\,;b]$	$a < x \leq b$	a exclue, b comprise
$[a\,;+\infty[$	$x \geq a$	a comprise
$]a\,;+\infty[$	$x > a$	a exclue
$]-\infty\,;b]$	$x \leq b$	b comprise
$]-\infty\,;b[$	$x < b$	b exclue

Tous les réels forment l'intervalle $]-\infty\,;+\infty[$, c'est-à-dire $\mathbb{R}$. On écrit toujours la plus petite borne à gauche.

Exemple. Écrire $-6 \leq x < 2$ sous forme d'intervalle.

Étape 1. La borne de gauche est -6 ; l'inégalité est large ($\leq$), elle est comprise : crochet tourné vers l'intérieur.

Étape 2. La borne de droite est 2 ; l'inégalité est stricte ($<$), elle est exclue : crochet tourné vers l'extérieur.

On écrit $[-6\,;2[$. Donc $-6 \in [-6\,;2[$ mais $2 \notin [-6\,;2[$.

À RETENIR · LES TROIS SYMBOLES

Rappel : $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels 0, 1, 2, 3… ; $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs …, -2, -1, 0, 1, 2…

$\in$ (« appartient à ») va entre un **nombre** et un ensemble : $3 \in \mathbb{N}$, $4{,}5 \in [4\,;5]$. Son contraire est $\notin$.

$\subset$ (« est inclus dans ») va entre deux **ensembles** : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $[3\,;4] \subset [0\,;5]$. $A \subset B$ veut dire : tout élément de A est aussi dans B. Pour montrer que c'est faux, il suffit d'un élément de A qui n'est pas dans B.

ATTENTION · Crochets ou accolades

$[2\,;5]$ est l'intervalle : **tous** les réels de 2 à 5, une infinité de nombres. $\{2\,;5\}$, avec des accolades, ne contient que **deux** nombres : 2 et 5. Les accolades servent à lister les éléments un par un, les crochets à décrire un morceau de droite.

B. L'intersection : « et »

À RETENIR · LA DÉFINITION

$$x \in I \cap J \iff x \in I \text{ et } x \in J$$

L'intersection est la partie **commune** aux deux intervalles.

À RETENIR · LA MÉTHODE

1 Je dessine I et J sur deux droites graduées l'une sous l'autre, avec les mêmes graduations.

2 Le **début** de l'intersection est le plus grand des deux débuts ; la **fin** est la plus petite des deux fins.

3 Une borne est comprise seulement si elle appartient aux **deux** intervalles : je la teste dans chacun.

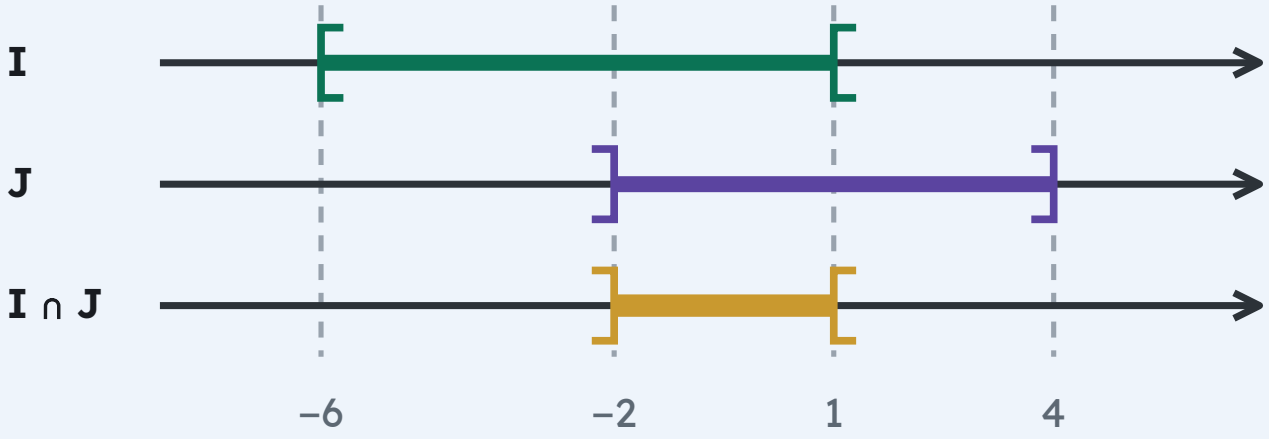
4 Si le début est après la fin, il n'y a rien en commun : $\varnothing$.

Exemple. $I = [-6\,;1[$ et $J =]-2\,;4]$.

Début. Le plus grand des deux débuts est -2. Il n'est pas dans J (crochet tourné vers l'extérieur) : il est exclu.

Fin. La plus petite des deux fins est 1. Il n'est pas dans I (crochet tourné vers l'extérieur) : il est exclu.

$I \cap J =]-2\,;1[$.



ATTENTION · Une intersection peut être un point, ou rien du tout

$[1\,;3] \cap [3\,;5] = \{3\}$: le seul nombre commun est 3, et il est dans les deux. Mais $[1\,;3[\cap[3\,;5] = \varnothing$: le 3 n'est plus dans le premier intervalle, il ne reste rien. Un seul crochet change la réponse.

C. La réunion : « ou »

À RETENIR · LA DÉFINITION

$$x \in I \cup J \iff x \in I \text{ ou } x \in J$$

Ce « ou » est **large** : x est dans I, ou dans J, ou dans les deux.

À RETENIR · LA MÉTHODE

1 Je dessine I et J l'un sous l'autre.

2 Je cherche s'il y a un **trou** entre les deux.

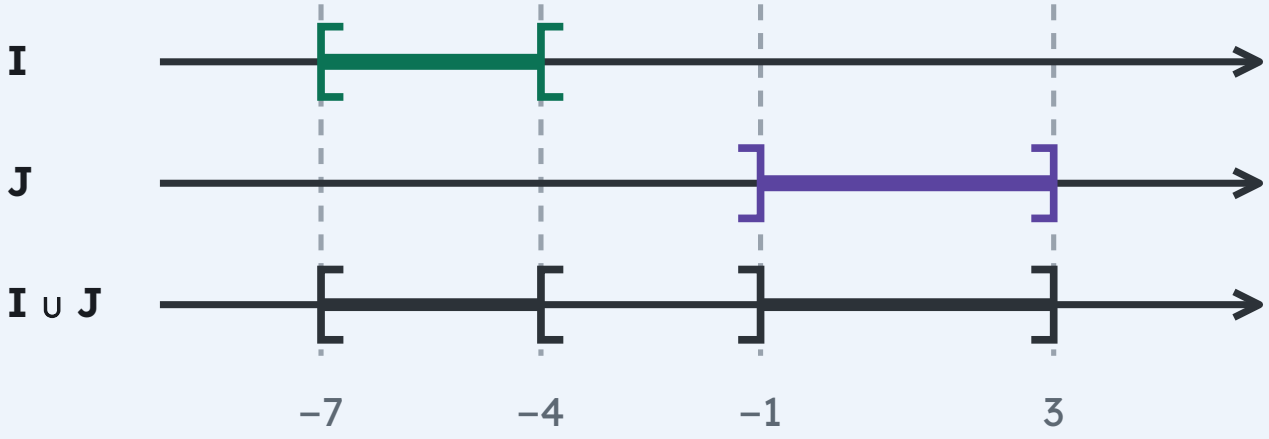
3 Pas de trou (ils se chevauchent, ou se touchent sans qu'il manque un nombre) : un seul intervalle, du plus petit des débuts au plus grand des fins, avec les crochets de ces bornes-là.

4 Un trou : on garde deux morceaux, reliés par $\cup$.

Exemple. $I = [-7\,;-4[$ et $J =]-1\,;3]$.

Entre -4 et -1, il y a un trou : les nombres de -4 à -1 ne sont dans aucun des deux. On ne peut pas écrire un seul intervalle.

$I \cup J = [-7\,;-4[\cup]-1\,;3]$ et $I \cap J = \varnothing$.



ATTENTION · Deux intervalles qui se touchent

$]0\,;2[\cup]2\,;5[$ n'est **pas** $]0\,;5[$: le nombre 2 n'est dans aucun des deux, il manque dans la réunion. En revanche $]0\,;2]\cup]2\,;5[=]0\,;5[$: cette fois le 2 est dans le premier, aucun nombre ne manque.

D. Intervalles et ensembles de nombres

Un intervalle contient une infinité de réels, mais seulement certains entiers. Pour les trouver, on **intersecte** l'intervalle avec l'ensemble de nombres demandé, puis on liste les éléments entre accolades.

Exemple. $\mathbb{Z} \cap]-5\,;-1{,}5]$. On cherche les entiers relatifs x tels que $-5 < x \leq -1{,}5$. -5 est exclu ; -4, -3 et -2 conviennent ; -1 est plus grand que $-1{,}5$, donc au-delà de la borne.

$\mathbb{Z} \cap]-5\,;-1{,}5] = \{-4\,;-3\,;-2\}$.

Avec le même intervalle mais l'ensemble $\mathbb{N}$: aucun entier naturel n'est négatif, donc $\mathbb{N} \cap]-5\,;-1{,}5] = \varnothing$.

2 Exercices types

Trois exercices corrigés : traduire un intervalle, trouver une intersection et une réunion, puis mélanger intervalles et ensembles de nombres.

Exercice 1 PASSER D'UNE INÉGALITÉ À UN INTERVALLE, ET L'INVERSE

1. Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des réels x tels que :

a) $-1 < x \leq 8$ b) $x \geq -2{,}5$ c) $x < 0$

2. Traduire chaque appartenance par une inégalité.

a) $x \in]3\,;10]$ b) $x \in]-\infty\,;-4[$ c) $x \in [-7\,;-2]$

3. Un matin, la température sur un balcon est toujours restée supérieure ou égale à -3 °C, et strictement inférieure à 12 °C. On note T la température, en °C. Écrire l'intervalle auquel appartient T, puis le représenter sur une droite graduée. Les nombres -3 et 12 appartiennent-ils à cet intervalle ?

CORRECTION

1. Pour chaque borne, je regarde si l'inégalité est large (borne comprise) ou stricte (borne exclue).

a)

-1 est exclu (inégalité stricte), 8 est compris (inégalité large) : $]-1\,;8]$.

b)

$-2{,}5$ est compris, et rien n'arrête x vers la droite : l'intervalle va jusqu'à $+\infty$, avec un crochet tourné vers l'extérieur. $[-2{,}5\,;+\infty[$.

c)

0 est exclu, et rien n'arrête x vers la gauche : $]-\infty\,;0[$.

2. Je lis chaque crochet.

a)

3 exclu, 10 compris : $3 < x \leq 10$.

b)

Seule la borne -4 compte, et elle est exclue : $x < -4$.

c)

Les deux bornes sont comprises : $-7 \leq x \leq -2$.

3. « Supérieure ou égale à -3 » : -3 est compris. « Strictement inférieure à 12 » : 12 est exclu. Donc $-3 \leq T < 12$, c'est-à-dire $T \in [-3\,;12[$.



$-3 \in [-3\,;12[$: le crochet est tourné vers l'intérieur. $12 \notin [-3\,;12[$: le crochet est tourné vers l'extérieur.

1. $]-1\,;8]$; $[-2{,}5\,;+\infty[$; $]-\infty\,;0[$ **2.** $3 < x \leq 10$; $x < -4$; $-7 \leq x \leq -2$ **3.** $[-3\,;12[$; -3 **appartient à l'intervalle,** 12 **non.**

Exercice 2 INTERSECTION ET RÉUNION DE DEUX INTERVALLES

1. Pour chaque couple d'intervalles, déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$.

a) $I = [-3\,;4]$ et $J =]1\,;6[$ b) $I = [2\,;+\infty[$ et $J = [-1\,;5]$ c) $I =]-\infty\,;-1[$ et $J = [2\,;7]$

2. Écrire sous forme d'un intervalle, ou d'une réunion d'intervalles, l'ensemble des réels x tels que :

a) $x \geq -2$ et $x < 3$ b) $x < -2$ ou $x \geq 3$

CORRECTION

1. a) Je dessine les deux intervalles l'un sous l'autre.



Intersection.

Le plus grand des débuts est 1 : il n'est pas dans J, il est exclu. La plus petite des fins est 4 : elle est dans I et dans J, elle est comprise. $I \cap J =]1\,;4]$.

Réunion.

Les deux intervalles se chevauchent, il n'y a pas de trou : on va du plus petit des débuts, -3 (compris), au plus grand des fins, 6 (exclu). $I \cup J = [-3\,;6[$.

1. b)

Intersection.

Le plus grand des débuts est 2 : il est dans I et dans J, il est compris. I va jusqu'à $+\infty$ et J s'arrête à 5 : la plus petite des fins est 5, comprise dans les deux. $I \cap J = [2\,;5]$.

Réunion.

Pas de trou : on part de -1 (compris) et on va jusqu'à $+\infty$. $I \cup J = [-1\,;+\infty[$.

1. c)

Intersection.

Le début serait 2 et la fin -1 : le début est après la fin, il n'y a rien en commun. $I \cap J = \varnothing$.

Réunion.

Entre -1 et 2, il y a un trou : un nombre comme 0 n'est ni dans I ni dans J. On garde deux morceaux : $I \cup J =]-\infty\,;-1[\cup [2\,;7]$.

2. a) « $x \geq -2$ » donne l'intervalle $[-2\,;+\infty[$, et « $x < 3$ » donne $]-\infty\,;3[$. Le « et » demande les deux à la fois : c'est une intersection. Le début est -2 (compris), la fin est 3 (exclue) :

$$[-2\,;+\infty[\cap]-\infty\,;3[=[-2\,;3[$$

2. b) « $x<-2$ » donne $]-\infty\,;-2[$, et « $x\geq 3$ » donne $[3\,;+\infty[$. Le « ou » demande l'un ou l'autre : c'est une réunion. Entre -2 et 3, il y a un trou (0 ne convient pas) : on garde deux morceaux, $]-\infty\,;-2[\cup[3\,;+\infty[$.

1. a) $]1\,;4]$ **et** $[-3\,;6[$ **b)** $[2\,;5]$ **et** $[-1\,;+\infty[$ **c)** $\varnothing$ **et** $]-\infty\,;-1[\cup[2\,;7]$ **2. a)** $[-2\,;3[$ **b)** $]-\infty\,;-2[\cup[3\,;+\infty[$

Exercice 3 APPARTENIR À UN INTERVALLE, ÊTRE INCLUS, EXTRAIRE LES ENTIERS D'UN INTERVALLE

1. Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, et justifier.

a) $5\in[-2\,;5[$ b) $\sqrt{2}\in[1\,;1{,}4]$ c) $-\pi\in]-4\,;-3[$ d) $\dfrac{1}{3}\in]0{,}3\,;0{,}33[$ e) $[2\,;3]\subset]1\,;3]$

2. Écrire chacun des ensembles suivants en donnant la liste de ses éléments entre accolades, ou $\varnothing$ s'il n'a aucun élément.

a) $\mathbb{N}\cap]-3\,;2]$ b) $\mathbb{Z}\cap[-2\,;3[$ c) $\mathbb{Z}\cap]-1\,;1[$ d) $\mathbb{N}\cap]-\infty\,;-1]$ e) $\mathbb{Z}\cap]2{,}5\,;5{,}5]$

3. Compléter par $\in$, $\notin$ ou $\subset$.

a) $-3\ \ldots\ \mathbb{N}$ b) $\mathbb{N}\ \ldots\ \mathbb{Z}$ c) $0\ \ldots\ ]0\,;1[$ d) $[1\,;2]\ \ldots\ [0\,;3]$ e) $\dfrac{1}{2}\ \ldots\ [0\,;1]$

CORRECTION

1. Pour un nombre et un intervalle, on compare le nombre aux deux bornes, puis on regarde si la borne en cause est comprise.

a)

Faux. 5 est la borne de droite de $[-2\,;5[$, et le crochet est tourné vers l'extérieur : la borne est exclue. $5\notin[-2\,;5[$.

b)

Faux. On compare $\sqrt{2}$ à la borne $1{,}4$. $\sqrt{2}\approx 1{,}414$, et $1{,}414>1{,}4$: $\sqrt{2}$ dépasse la borne de droite. $\sqrt{2}\notin[1\,;1{,}4]$.

c)

Vrai. $\pi\approx 3{,}14$, donc $-\pi\approx -3{,}14$: sur la droite graduée, ce nombre est entre -4 et -3. Donc $-\pi\in]-4\,;-3[$.

d)

Faux. $\dfrac{1}{3}=0{,}333\ldots$ est plus grand que $0{,}33$: la borne de droite est dépassée. $\dfrac{1}{3}\notin]0{,}3\,;0{,}33[$.

e)

Vrai. Si $2 \leq x \leq 3$, alors $x > 1$ et $x \leq 3$. Tout nombre de $[2\,;3]$ est donc dans $]1\,;3]$: $[2\,;3] \subset]1\,;3]$.

2. On cherche les entiers qui sont dans l'intervalle, en regardant chaque borne.

a)

$]-3\,;2]$: -3 est exclu, 2 est compris. Les entiers naturels sont positifs ou nuls : on garde 0, 1, 2. $\mathbb{N} \cap]-3\,;2] = \{0\,;1\,;2\}$.

b)

$[-2\,;3[$: -2 est compris, 3 est exclu. $\mathbb{Z} \cap [-2\,;3[= \{-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\}$.

c)

$]-1\,;1[$: -1 et 1 sont exclus, il reste 0. $\mathbb{Z} \cap]-1\,;1[= \{0\}$.

d)

Tous les nombres de $]-\infty\,;-1]$ sont inférieurs ou égaux à -1, donc strictement négatifs. Les entiers naturels sont positifs ou nuls : aucun n'est dans l'intervalle. $\mathbb{N} \cap]-\infty\,;-1] = \varnothing$.

e)

$]2{,}5\,;5{,}5]$: 2 est avant la borne de gauche, 3 est dedans ; 5 est dedans car $5 \leq 5{,}5$; 6 est au-delà. $\mathbb{Z} \cap]2{,}5\,;5{,}5] = \{3\,;4\,;5\}$.

3. On utilise $\in$ entre un nombre et un ensemble, et $\subset$ entre deux ensembles.

a)

$-3 \notin \mathbb{N}$: -3 est négatif.

b)

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$: deux ensembles.

c)

$0 \notin]0\,;1[$: la borne 0 est exclue.

d)

$[1\,;2] \subset [0\,;3]$: $0 \leq 1$ et $2 \leq 3$.

e)

$\frac{1}{2} \in [0\,;1]$: $0 \leq 0{,}5 \leq 1$.

1. F, F, V, F, V **2.** $\{0\,;1\,;2\}$; $\{-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\}$; $\{0\}$; $\varnothing$; $\{3\,;4\,;5\}$ **3.** $\notin$, $\subset$, $\notin$, $\subset$, $\in$

3 À toi de jouer

Quatre exercices pour t'entraîner. Cherche sans regarder les réponses : elles sont regroupées en fin de fiche.

Les réponses sont à la fin de la fiche, dans « Réponses des devoirs ». Cherche d'abord, vérifie ensuite.

1. **Un intervalle, des nombres.** On considère l'intervalle $I =]-2\,;5]$.

a) Traduire « $x \in I$ » par une inégalité.

b) Compléter par $\in$ ou $\notin$: $-2 \ldots I$; $0 \ldots I$; $5 \ldots I$; $5{,}1 \ldots I$.

c) Écrire $\mathbb{Z} \cap I$ en listant ses éléments entre accolades.

2. **Intersections et réunions.** On donne $A =]-6\,;2]$, $B = [-1\,;4[$ et $C =]5\,;+\infty[$.

a) Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

b) Déterminer $B \cap C$ et $B \cup C$.

c) Représenter A, B et $A \cap B$ sur trois droites graduées l'une sous l'autre.

3. **Vrai ou faux.** Dire si chaque égalité ou inclusion est vraie ou fausse, et justifier.

a) $[-2\,;1] \cap [1\,;6] = \{1\}$

b) $]-2\,;1[\cup]1\,;6[=]-2\,;6[$

c) $\{0\,;4\} \subset [0\,;4]$

d) $[0\,;4] \subset \{0\,;4\}$

4. **Deux manèges.** On note t la taille d'un enfant, en mètres ($t > 0$). Le manège A accepte les enfants qui mesurent au moins $1{,}10$ m. Le manège B accepte ceux qui mesurent strictement moins de $1{,}40$ m.
   a) Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des tailles acceptées par le manège A, puis par le manège B.

   b) Quelles tailles permettent de faire les deux manèges ? Donner un intervalle.

   c) Quelles tailles permettent de faire au moins un des deux manèges ?

   d) Un enfant mesure $1{,}40$ m. Quels manèges peut-il faire ?

Réponses des devoirs

À ne regarder qu'après avoir cherché, et à comparer avec ta rédaction : la réponse seule ne suffit pas en contrôle, c'est la justification qui compte.

Réponses des exercices de « À toi de jouer ».

1. a) $-2 < x \leq 5$. b) $-2 \notin I$ (borne exclue) ; $0 \in I$; $5 \in I$ (borne comprise) ; $5{,}1 \notin I$, car $5{,}1 > 5$. c) $\mathbb{Z} \cap I = \{-1\,;0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$.
2. a) $A \cap B = [-1\,;2]$: le début -1 est dans A et dans B, la fin 2 aussi. $A \cup B =]-6\,;4[$: il n'y a pas de trou. b) B s'arrête avant 4 et C commence après 5 : $B \cap C = \varnothing$. Entre 4 et 5 il y a un trou, donc $B \cup C = [-1\,;4[\cup]5\,;+\infty[$. c) A va de -6 (crochet tourné vers l'extérieur) à 2 (crochet tourné vers l'intérieur) ; B va de -1 (vers l'intérieur) à 4 (vers l'extérieur) ; $A \cap B$ va de -1 à 2, avec deux crochets tournés vers l'intérieur.
3. a) Vrai : 1 est dans les deux intervalles (deux crochets tournés vers l'intérieur), et c'est le seul nombre commun. b) Faux : 1 n'est dans aucun des deux intervalles, il manque dans la réunion. c) Vrai : $\{0\,;4\}$ contient deux nombres, 0 et 4, et tous les deux sont dans $[0\,;4]$ (bornes comprises). d) Faux : 2 est dans $[0\,;4]$ mais pas dans $\{0\,;4\}$, qui ne contient que deux nombres.
4. a) Manège A : $t \geq 1{,}10$, soit $[1{,}10\,;+\infty[$. Manège B : $0 < t < 1{,}40$, soit $]0\,;1{,}40[$. b) Les deux à la fois, c'est l'intersection : $[1{,}10\,;+\infty[\cap]0\,;1{,}40[= [1{,}10\,;1{,}40[$. c) Au moins un des deux, c'est la réunion. Les deux intervalles se chevauchent : $[1{,}10\,;+\infty[\cup]0\,;1{,}40[=]0\,;+\infty[$. Tous les enfants peuvent faire au moins un manège. d) $1{,}40 \in [1{,}10\,;+\infty[$ mais $1{,}40 \notin]0\,;1{,}40[$: il peut faire le manège A seulement.