Étudier le signe d'une expression

2de · 1re | Mathématiques | Fiche de cours

DANS CETTE FICHE

1 L'essentiel du cours 2
2 Exercices types 7
3 À toi de jouer 15
Réponses des devoirs 17

1 L'essentiel du cours

1. Reconnaître

Pour résoudre une inéquation, et plus tard pour étudier les variations d'une fonction, il faut savoir trouver **le signe d'une expression**. Ce tableau te dit quoi faire selon ce que tu as sous les yeux.

En 2de, les parties 1, 2, 3, 4 et 6 suffisent, avec les encadrés « Le piège : x au carré égal à un nombre » et « Contrôler un tableau avec une valeur test » de la partie 5. Le discriminant et tout ce qui est marqué (1re) sont au programme de 1re : les exercices 7 et 10 et le dernier devoir.

Ce que je vois	Ce que je fais
$ax+b$	Je résous $ax+b>0$. La racine (la valeur de x qui annule $ax+b$) est $-\dfrac{b}{a}$, et à droite de la racine on a le signe de a. $3x+2$: $-$ puis $+$ autour de $-\frac{2}{3}$
un produit $A(x)\times B(x)$	Une ligne par facteur, puis la règle des signes, colonne par colonne. $(3x+2)(-x+4)$: deux lignes, puis le produit
un quotient $\dfrac{A(x)}{B(x)}$	Pareil que pour un produit, avec une double barre là où le dénominateur s'annule. $\dfrac{3x+2}{-x+4}$: double barre en 4
ax^2+bx+c (1re)	Je calcule Δ et les racines. Le trinôme a le signe de a , sauf entre les racines. x^2-x-2 : $+,-,+$
un carré, ou x^2+1	Ce facteur est toujours positif : il ne change pas le signe. $(x+1)^2\geqslant 0$, $x^2+1>0$
une inéquation $A\leqslant B$	Je passe tout du même côté pour avoir $A-B\leqslant 0$, je factorise, puis je fais le tableau.
rien de tout ça	Je factorise d'abord (facteur commun, identité remarquable, et en 1re racines du trinôme), puis je reviens à une des lignes ci-dessus.

À RETENIR · UN TABLEAU DE SIGNES, POUR UN PRODUIT OU UN QUOTIENT

Un tableau de signes ne sert que pour des facteurs **multipliés** ou **divisés** : c'est la règle des signes qui fabrique la dernière ligne. Pour une **somme**, la règle des signes ne s'applique pas. On réduit d'abord au même dénominateur, ou on factorise, pour obtenir un produit ou un quotient.

ATTENTION · L'exception : une somme de deux nombres positifs

Une somme de deux nombres positifs est positive, sans tableau. Par exemple, $2 + \dfrac{1}{x^2} > 0$ pour tout $x \neq 0$, car $2 > 0$ et $\dfrac{1}{x^2} > 0$.

2. Le signe de ax + b

À RETENIR · À DROITE DE LA RACINE, LE SIGNE DE A

Avec $a \neq 0$, l'expression $ax + b$ s'annule en $x = -\dfrac{b}{a}$. Cette valeur s'appelle la **racine** de $ax + b$: c'est la valeur de x pour laquelle l'expression vaut 0. **À droite de la racine, $ax + b$ a le signe de a ; à gauche, le signe contraire.**

Exemple. Le signe de $f(x) = 3x + 2$. On résout :

$$\begin{aligned} 3x + 2 &> 0 \\ 3x &> -2 \\ x &> -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Donc $f(x) > 0$ pour $x > -\frac{2}{3}$: le signe $+$ est à droite de $-\frac{2}{3}$.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

ATTENTION · Le piège : diviser par un négatif

Quand on multiplie ou qu'on divise une inéquation par un nombre **négatif**, on **retourne** le sens de l'inégalité.

$$\begin{aligned} -x+4 &> 0 \\ -x &> -4 \\ x &< 4 \quad (\text{on multiplie par } -1 : \text{on retourne}) \end{aligned}$$

Donc $-x+4$ est positif **avant** 4 et négatif après. C'est cohérent avec la règle : $a=-1<0$, donc à droite de la racine, c'est négatif.

3. Le signe d'un produit

On fait **une ligne par facteur**, avec un 0 sous chaque racine. Ensuite, on remplit la dernière ligne colonne par colonne avec la règle des signes : deux signes pareils donnent $+$, deux signes contraires donnent $-$.

Exemple. $f(x)=(3x+2)(-x+4)$. Le facteur $3x+2$ s'annule en $-\frac{2}{3}$ (partie 2) et le facteur $-x+4$ s'annule en 4 (encadré « Le piège : diviser par un négatif »).

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		4		$+\infty$
$3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ATTENTION · Le piège : un signe moins devant un produit

Un signe moins devant un produit ne va que dans **un seul** facteur, celui qu'on veut :

$$-(x+2)(x-5)=(-x-2)(x-5)$$

Le mettre dans les deux facteurs, c'est multiplier deux fois par -1 : le produit $(-x-2)(-x+5)$ vaut $(x+2)(x-5)$, et le signe moins a disparu.

Ici, $-x-2$ s'annule en -2 et est positif avant ; $x-5$ s'annule en 5 et est positif après. Le produit est donc négatif avant -2, positif entre -2 et 5, et négatif après 5.

4. Le signe d'un quotient

À RETENIR · LA DOUBLE BARRE

Pour un quotient, le tableau est le même que pour un produit. Mais là où le **dénominateur** s'annule, le quotient n'existe pas : c'est une **valeur interdite**. Dans la ligne du quotient, on y trace une **double barre**, jamais un 0. Dans la ligne du dénominateur, on met bien le 0, puisque le dénominateur vaut 0 à cet endroit. Dans les solutions d'une inéquation, le crochet y est toujours **ouvert**.

Exemple. $f(x) = \dfrac{3x+2}{-x+4}$. Valeur interdite : $-x+4 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 4$. Donc :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{4\} =]-\infty\,;4[\cup]4\,;+\infty[$$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		4		$+\infty$
$3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

5. Le signe d'un trinôme

À RETENIR · DU SIGNE DE A, SAUF ENTRE LES RACINES (1RE)

Un **trinôme** est une expression ax^2+bx+c, avec $a \neq 0$. On calcule son **discriminant** :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- si $\Delta > 0$, il y a deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Le trinôme se factorise en $a(x-x_1)(x-x_2)$. Il a le signe de a à l'extérieur des racines, et le signe contraire entre elles ;
- si $\Delta = 0$, il y a une seule racine : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. Le trinôme se factorise en $a(x-x_0)^2$. Il a le signe de a partout, sauf en x_0 où il s'annule ;
- si $\Delta < 0$, il n'y a pas de racine. Le trinôme a le signe de a partout, sans jamais s'annuler.

Exemple (1re). Le signe de $x^2 - x - 2$. On a $a = 1$, $b = -1$ et $c = -2$.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) \\ \Delta &= 1 + 8 \\ \Delta &= 9\end{aligned}$$

$\Delta > 0$, donc deux racines. On a $\sqrt{\Delta} = 3$, $-b = 1$ et $2a = 2$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1-3}{2} & \qquad x_2 &= \frac{1+3}{2} \\ x_1 &= -1 & \qquad x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Donc $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$. Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ATTENTION · Le piège : x au carré égal à un nombre

L'inéquation $x^2 > 25$ ne donne pas $x > 5$: il manque les nombres négatifs dont le carré dépasse 25, comme -6. **L'équation $x^2 = k$, avec $k > 0$, a deux solutions : $-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}$.**

Pour résoudre $x^2 > 25$, on ramène tout à gauche et on factorise avec l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$\begin{aligned} x^2 - 25 &> 0 \\ (x-5)(x+5) &> 0 \end{aligned}$$

On étudie le signe de ce produit comme dans la partie 3. Le facteur $x + 5$ s'annule en -5 et le facteur $x - 5$ en 5. Avant -5, les deux facteurs sont négatifs : le produit est positif. Entre -5 et 5, seul $x - 5$ est négatif : le produit est négatif. Après 5, les deux facteurs sont positifs : le produit est positif. Donc $S =]-\infty\,;-5[\cup]5\,;+\infty[$.

Même réflexe pour une valeur interdite : $\dfrac{1}{x^2 - 16}$ n'existe ni pour $x = -4$, ni pour $x = 4$.

À RETENIR · CONTRÔLER UN TABLEAU AVEC UNE VALEUR TEST

Avant de lire les solutions, on choisit un nombre facile dans une zone du tableau, souvent 0, et on calcule directement le signe de l'expression. S'il ne correspond pas à la dernière ligne du tableau (celle de l'expression), cette ligne est fausse.

Exemple. L'expression $x^2 - 16$ s'annule en -4 et en 4. Pour $x = 0$, elle vaut $0^2 - 16 = -16$, qui est négatif : entre -4 et 4, sa ligne doit porter un $-$.

6. Résoudre une inéquation

À RETENIR · LA MÉTHODE EN QUATRE TEMPS

1. Tout ramener d'un côté, 0 de l'autre. **2.** Factoriser, ou réduire au même dénominateur. **3.** Dresser le tableau de signes. **4.** Lire les solutions, et conclure par une phrase.

On ne multiplie jamais les deux membres par une expression dont on ne connaît pas le signe.

Exemple. Résoudre $\dfrac{x}{x+2} \geqslant 2$, avec $x \neq -2$. On ramène tout à gauche :

$$\frac{x}{x+2} - 2 = \frac{x}{x+2} - \frac{2(x+2)}{x+2}$$
$$\frac{x}{x+2} - 2 = \frac{x - 2x - 4}{x+2}$$
$$\frac{x}{x+2} - 2 = \frac{-x-4}{x+2}$$

Le numérateur $-x - 4$ s'annule en -4 ($a = -1$: positif avant, négatif après). Le dénominateur s'annule en -2 : valeur interdite.

x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
$-x-4$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
quotient		$-$	0	$+$	‖	$-$	

On veut le quotient positif ou nul : l'ensemble des solutions est $S = [-4\,;-2[$. Le crochet est fermé en -4, où le quotient vaut 0, et ouvert en -2, la valeur interdite.

2 Exercices types

Dix exercices, du plus simple (★) au plus difficile (★★★★★). La correction suit chaque énoncé. Les exercices 7 et 10 sont au programme de 1re.

Exercice 1 (★) LE SIGNE DE AX + B

Dresser le tableau de signes de chacune des expressions suivantes.

a. $2x-6$ **b.** $-3x+6$ **c.** $4-x$

CORRECTION

a.

On résout $2x-6>0$:

$$\begin{aligned} 2x-6 &> 0 \\ 2x &> 6 \\ x &> 3 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$2x-6$		$-$	0	$+$	

b.

On résout $-3x+6>0$:

$$\begin{aligned} -3x+6 &> 0 \\ -3x &> -6 \\ x &< 2 \quad (\text{on divise par } -3 : \text{on retourne}) \end{aligned}$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-3x+6$		$+$	0	$-$	

c.

Attention, $4-x$ s'écrit aussi $-x+4$: le coefficient de x est $a=-1$, il est négatif. On résout $4-x>0$:

$$\begin{aligned} 4-x &> 0 \\ -x &> -4 \\ x &< 4 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$4-x$		$+$	0	$-$	

a. $-$ puis $+$ autour de 3 ; b. $+$ puis $-$ autour de 2 ; c. $+$ puis $-$ autour de 4

Exercice 2 (★) INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

Résoudre les inéquations suivantes, et donner les solutions sous forme d'intervalle.

a. $5x + 10 \leqslant 0$ **b.** $-2x + 7 > 0$

CORRECTION

a.

$$\begin{aligned} 5x + 10 &\leqslant 0 \\ 5x &\leqslant -10 \\ x &\leqslant -2 \end{aligned}$$

$S =]-\infty\,;-2]$: le crochet est fermé, car l'inégalité est large.

b.

$$\begin{aligned} -2x + 7 &> 0 \\ -2x &> -7 \\ x &< \frac{7}{2} \quad \text{(on divise par } -2 \text{ : on retourne)} \end{aligned}$$

$S = \left]-\infty\,;\frac{7}{2}\right[$.

a. $S =]-\infty\,;-2]$ **; b.** $S = \left]-\infty\,;\frac{7}{2}\right[$

Exercice 3 (★★) UN PRODUIT

Dresser le tableau de signes de $f(x) = (x-3)(2x+4)$.

CORRECTION

1

Le facteur $x - 3$ s'annule en $x = 3$. Son coefficient est $1 > 0$: il est négatif avant 3 et positif après.

2

Le facteur $2x + 4$ s'annule quand $2x = -4$, donc en $x = -2$. Son coefficient est $2 > 0$: il est négatif avant -2 et positif après.

3

On range les racines dans l'ordre, -2 puis 3, et on applique la règle des signes.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(x) > 0$ **sur** $]-\infty\,;-2[$ **et sur** $]3\,;+\infty[$ **;** $f(x) < 0$ **sur** $]-2\,;3[$

Exercice 4 (★★) UN PRODUIT, AVEC UN FACTEUR À L'ENVERS

Dresser le tableau de signes de $g(x) = (-x+1)(3x-6)$.

CORRECTION

1

Le facteur $-x+1$ s'annule en $x=1$. Son coefficient est $-1<0$: il est **positif avant** 1 et négatif après.

2

Le facteur $3x-6$ s'annule quand $3x=6$, donc en $x=2$. Son coefficient est $3>0$: il est négatif avant 2 et positif après.

3

Le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$3x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$g(x) < 0$ **sur** $]-\infty\,;1[$ **et sur** $]2\,;+\infty[$ **;** $g(x) > 0$ **sur** $]1\,;2[$

Exercice 5 (★★★) UN QUOTIENT

Résoudre l'inéquation $\dfrac{x+5}{2x-4} \geqslant 0$.

CORRECTION

1

Le dénominateur s'annule quand $2x = 4$, donc en $x = 2$: c'est une **valeur interdite**.

2

Le numérateur $x + 5$ s'annule en $x = -5$. Il est négatif avant -5 et positif après.

3

Le tableau, avec une double barre en 2 :

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
quotient		$+$	0	$-$	‖	$+$	

4

On veut le quotient positif ou nul. On garde donc -5, où il vaut 0, mais pas 2, la valeur interdite.

$S =]-\infty\,;-5] \cup]2\,;+\infty[$

Exercice 6 (★★★) UN FACTEUR TOUJOURS POSITIF

Étudier le signe de $h(x) = (x-2)(x^2+1)$.

CORRECTION

1

Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$, donc $x^2 + 1 \geqslant 1$. Le facteur $x^2 + 1$ est donc **toujours strictement positif** : inutile de lui chercher des racines.

2

Le produit a donc le signe de $x - 2$, qui s'annule en 2.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
x^2+1		$+$	|	$+$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	

$h(x) < 0$ **sur** $]-\infty\,;2[$, $h(2) = 0$, **et** $h(x) > 0$ **sur** $]2\,;+\infty[$

Exercice 7 (★★★★, 1re) LE SIGNE D'UN TRINÔME

a. Résoudre l'inéquation $-2x^2 - x + 3 \geqslant 0$.

b. Étudier le signe de $-x^2 + 4x - 5$.

CORRECTION

a.

On a $a = -2$, $b = -1$ et $c = 3$.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ \Delta &= (-1)^2 - 4 \times (-2) \times 3\\ \Delta &= 1 + 24\\ \Delta &= 25\end{aligned}$$

$\Delta > 0$, donc deux racines. On a $\sqrt{\Delta} = 5$, $-b = 1$ et $2a = -4$:

$$x_1 = \frac{1-5}{-4} \qquad x_2 = \frac{1+5}{-4}$$
$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -\frac{3}{2}$$

Contrôle : pour $x = 1$, on a $-2 \times 1^2 - 1 + 3 = 0$, donc 1 est bien une racine.

Comme $a = -2 < 0$, le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$-2x^2 - x + 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On veut le trinôme positif ou nul : $S = \left[-\frac{3}{2}\,;1\right]$.

b.

On a $a = -1$, $b = 4$ et $c = -5$.

$$\begin{aligned}\Delta &= 4^2 - 4 \times (-1) \times (-5)\\ \Delta &= 16 - 20\\ \Delta &= -4\end{aligned}$$

$\Delta < 0$: pas de racine, le trinôme a le signe de $a = -1$ partout.

a. $S = \left[-\frac{3}{2}\,;1\right]$ **; b.** $-x^2 + 4x - 5 < 0$ **pour tout réel** x

Exercice 8 (★★★★) RAMENER À ZÉRO

Résoudre l'inéquation $\dfrac{2x+1}{x-3} \leqslant 1$.

CORRECTION

1

On ne multiplie pas par $x-3$: on ne connaît pas son signe. On ramène tout à gauche, en gardant les **parenthèses** :

$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{x-3} - 1 &= \frac{2x+1}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} \\
\frac{2x+1}{x-3} - 1 &= \frac{2x+1-(x-3)}{x-3} \\
\frac{2x+1}{x-3} - 1 &= \frac{2x+1-x+3}{x-3} \\
\frac{2x+1}{x-3} - 1 &= \frac{x+4}{x-3}
\end{aligned}$$

On doit donc résoudre $\dfrac{x+4}{x-3} \leqslant 0$.

2

Le numérateur s'annule en -4. Le dénominateur s'annule en 3 : c'est une valeur interdite.

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$x-3$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
quotient		$+$	0	$-$	‖	$+$	

3

On veut le quotient négatif ou nul : on garde -4, mais pas 3.

$S = [-4\,;3[$

Exercice 9 (★★★★★) UN DÉNOMINATEUR AU CARRÉ

Étudier le signe de $k(x) = \dfrac{x^2-4}{(x+1)^2}$.

CORRECTION

1

Le numérateur est une identité remarquable : $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Il s'annule en -2 et en 2.

2

Le dénominateur $(x+1)^2$ est un carré : il est strictement positif, sauf en -1 où il s'annule. Le nombre -1 est donc une valeur interdite.

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$k(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

3

Ici, le signe ne change pas en traversant la double barre : le dénominateur est positif des deux côtés de -1.

$k(x) > 0$ **sur** $]-\infty\,;-2[$ **et sur** $]2\,;+\infty[$ **;** $k(x) < 0$ **sur** $]-2\,;-1[$ **et sur** $]-1\,;2[$

Exercice 10 (★★★★★, 1re) DEUX FACTEURS QUI S'ANNULENT ENSEMBLE

Étudier le signe de $m(x) = (2-x)(x^2+x-6)$.

CORRECTION

1

On factorise le trinôme $x^2 + x - 6$:

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6)$$
$$\Delta = 1 + 24$$
$$\Delta = 25$$

$\Delta > 0$, donc deux racines. On a $\sqrt{\Delta} = 5$, $-b = -1$ et $2a = 2$:

$$x_1 = \frac{-1-5}{2} \qquad x_2 = \frac{-1+5}{2}$$
$$x_1 = -3 \qquad x_2 = 2$$

Avec la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ de la partie 5 et $a = 1$: $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$, et $m(x) = (2-x)(x+3)(x-2)$.

2

Trois facteurs, donc trois lignes. Le facteur $2 - x$ a pour coefficient -1 : il est positif avant 2.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$m(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

3

En 2, **deux** facteurs changent de signe en même temps, et leurs changements se compensent. On le voit en regroupant ces deux facteurs : $(2-x)(x-2) = -(x-2)^2$, qui est négatif des deux côtés de 2. Donc le signe de $m(x)$ ne change pas en 2.

$m(x) > 0$ **sur** $]-\infty\,;-3[$ **;** $m(x) < 0$ **sur** $]-3\,;2[$ **et sur** $]2\,;+\infty[$ **;** $m(-3) = 0$ **et** $m(2) = 0$

3 À toi de jouer

Sept exercices à chercher seul. Les réponses sont en fin de fiche : on cherche d'abord, on vérifie ensuite. Le dernier est au programme de 1re.

Les réponses sont à la fin de la fiche, dans « Réponses des devoirs ». Cherche d'abord, vérifie ensuite.

Exercice 1 du devoir. Diviser par un positif, diviser par un négatif. Résoudre les inéquations suivantes et donner les solutions sous forme d'intervalle.

a. $4x - 12 \leqslant 0$ b. $-5x + 15 > 0$ c. $7 - 2x \geqslant 0$

Exercice 2 du devoir. Un quotient. Résoudre l'inéquation $\dfrac{2x-6}{x+4} \leqslant 0$. Commence par la valeur interdite.

Exercice 3 du devoir. Un signe moins devant un produit. Étudier le signe de $f(x) = -(2x-4)(x+3)$, puis contrôler le tableau avec une valeur test.

Exercice 4 du devoir. Un carré plus petit qu'un nombre. Résoudre l'inéquation $x^2 \leqslant 49$, puis contrôler le tableau avec une valeur test.

Exercice 5 du devoir. Ramener à zéro. Résoudre l'inéquation $\dfrac{x+5}{x-1} \geqslant 2$.

Indice : on ne fait pas de produit en croix, car on ne connaît pas le signe de $x-1$.

Exercice 6 du devoir. La double barre. Étudier le signe de $f(x) = 2 - \dfrac{8}{x^2}$.

Indice : commence par tout écrire sur le même dénominateur.

Exercice 7 du devoir. Deux trinômes (1re). Étudier le signe de chacune des expressions suivantes, avec un tableau de signes.

a. $-3x^2 + 5x - 2$ b. $2x^2 - 3x + 4$

Réponses des devoirs

À ne regarder qu'après avoir cherché, et à comparer avec ta rédaction : la réponse seule ne suffit pas en contrôle, c'est la justification qui compte.

Réponses des exercices de « À toi de jouer ».

Exercice 1 du devoir : a. $4x \leqslant 12$, donc $x \leqslant 3$ (on divise par 4, qui est positif : on ne retourne pas) : $S =]-\infty\,;3]$. b. $-5x > -15$, donc $x < 3$ (on divise par -5 : on retourne) : $S =]-\infty\,;3[$. c. $-2x \geqslant -7$, donc $x \leqslant \frac{7}{2}$ (on divise par -2 : on retourne) : $S = \left]-\infty\,;\frac{7}{2}\right]$.

Exercice 2 du devoir : Valeur interdite : $x + 4 = 0$ pour $x = -4$. Le numérateur $2x - 6$ s'annule en 3. Le quotient est positif avant -4, double barre en -4, négatif entre -4 et 3, nul en 3, positif après 3. $S =]-4\,;3]$: crochet ouvert en -4 (valeur interdite), fermé en 3.

Exercice 3 du devoir : Le signe moins va dans un seul facteur : $f(x) = (-2x + 4)(x + 3)$. Le facteur $-2x + 4$ s'annule en 2 et est positif avant ; le facteur $x + 3$ s'annule en -3 et est positif après. $f(x) < 0$ sur $]-\infty\,;-3[$, $f(x) > 0$ sur $]-3\,;2[$, $f(x) < 0$ sur $]2\,;+\infty[$, et $f(-3) = 0$, $f(2) = 0$. Valeur test : $f(0) = -(-4) \times 3$, soit $f(0) = 12$, positif, comme le $+$ entre -3 et 2.

Exercice 4 du devoir : $x^2 - 49 \leqslant 0$, c'est-à-dire $(x - 7)(x + 7) \leqslant 0$. Le produit est positif avant -7, négatif entre -7 et 7, positif après 7, et vaut 0 en -7 et en 7. $S = [-7\,;7]$, avec des crochets fermés car l'inégalité est large. Valeur test : $0^2 - 49 = -49$, négatif, comme le $-$ entre -7 et 7.

Exercice 5 du devoir : On ramène tout à gauche et on réduit au même dénominateur : $\dfrac{x+5}{x-1} - 2 = \dfrac{-x+7}{x-1}$, car $x + 5 - 2(x - 1) = -x + 7$. Le numérateur s'annule en 7 ; valeur interdite : 1. Le quotient est négatif avant 1, double barre en 1, positif entre 1 et 7, nul en 7, négatif après 7. $S =]1\,;7]$.

Exercice 6 du devoir : Pour $x \neq 0$: $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$, et $2x^2 - 8 = 2(x - 2)(x + 2)$. Le numérateur s'annule en -2 et en 2 ; le dénominateur x^2 est positif pour $x \neq 0$. $f(x)$ est positif avant -2, négatif entre -2 et 0, double barre en 0, négatif entre 0 et 2, positif après 2. Ici, le signe ne change pas en 0.

Exercice 7 du devoir : a. $\Delta = 25 - 24 = 1$, racines $\frac{2}{3}$ et 1. Comme $a = -3 < 0$, le trinôme est négatif avant $\frac{2}{3}$, positif entre $\frac{2}{3}$ et 1, négatif après 1. b. $\Delta = 9 - 32 = -23 < 0$: pas de racine. Comme $a = 2 > 0$, $2x^2 - 3x + 4 > 0$ pour tout réel x.