Convexité

Terminale spécialité mathématiques | Mathématiques | Fiche de cours

DANS CETTE FICHE

1 L'essentiel du cours 1
2 Exercices types 14
3 À toi de jouer 20
Réponses des devoirs 24

1 L'essentiel du cours

Cette fiche couvre la convexité en terminale : les définitions (avec les tangentes et avec les cordes), la dérivée seconde, le point d'inflexion, l'esquisse de l'allure d'une courbe, la démonstration à savoir refaire, et l'utilisation de la convexité pour démontrer une inégalité. Pour calculer les dérivées, les formules sont dans la fiche « Compléments sur la dérivation (1) : dériver une fonction composée ».

En contrôle, on te demande surtout de lire la convexité sur un graphique, d'étudier le signe de f'', de trouver un point d'inflexion, d'esquisser l'allure d'une courbe, de refaire la démonstration du cours et de démontrer une inégalité avec une tangente. Le tableau ci-dessous te dit quoi faire selon ce qu'on te donne.

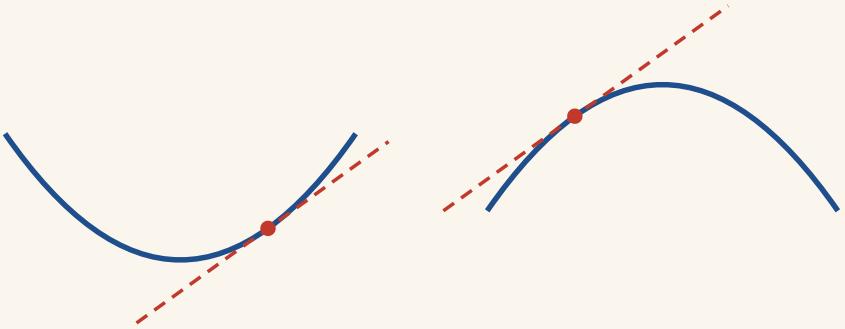
Ce que je vois	Ce que je fais	Partie
La courbe de f, parfois avec des tangentes tracées	Je regarde la forme de la courbe et sa position par rapport à ses tangentes. Au-dessus de ses tangentes, f est convexe ; en dessous, f est concave.	2
La courbe de f', ou le tableau de variations de f'	Je lis les **variations** de f', pas son signe. Si f' est croissante, f est convexe ; si f' est décroissante, f est concave.	3
L'expression de $f(x)$, ou la courbe de f''	Je calcule $f''(x)$ (ou je lis la courbe de f'') et j'étudie son **signe**. Là où $f''(x) \geq 0$, f est convexe ; là où $f''(x) \leq 0$, f est concave.	4
« Trouver le point d'inflexion »	Je cherche l'abscisse a où la convexité change : la courbe traverse sa tangente, ou f' change de sens de variation, ou f'' change de signe. Si f est connue, je calcule $f(a)$.	2, 3, 4
« Esquisser l'allure » à partir des variations de f et du signe de f''	Le tableau de variations donne le sens, le signe de f'' donne la forme (cuvette ou dôme). Je relie les points connus en respectant les deux.	4
« Montrer que $f(x) \geq mx + p$ » (ou $\leq$)	Je reconnais une tangente. J'étudie la convexité de f, j'écris l'équation de la tangente, et je conclus avec la position de la courbe par rapport à cette tangente.	5

1. Les définitions

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et C_f sa courbe représentative.

f **est convexe sur** I si C_f est située **au-dessus de toutes ses tangentes** sur I (courbe en forme de « cuvette »).

f **est concave sur** I si C_f est située **en dessous de toutes ses tangentes** sur I (courbe en forme de « dôme »).



convexe
au-dessus de ses tangentes

concave
en dessous de ses tangentes

À gauche, une courbe en cuvette au-dessus de sa tangente. À droite, une courbe en dôme en dessous de sa tangente.

*Une autre définition, équivalente. Le programme définit la convexité avec les **sécantes** : une sécante est une droite qui coupe la courbe en deux points. On regarde le morceau de cette droite situé entre les deux points, c'est-à-dire le segment qui les relie : on l'appelle une **corde**. f est convexe sur I si, entre deux points quelconques de C_f d'abscisses dans I, la courbe est en dessous de la corde qui les relie ; f est concave si la courbe est au-dessus. Pour une fonction dérivable, cette définition et celle avec les tangentes disent la même chose (c'est admis en terminale). Une courbe convexe est donc au-dessus de ses tangentes et en dessous de ses cordes.*

La dérivée seconde. On dérive f, on obtient f' ; si f' est elle-même dérivable, on la dérive à son tour. Le résultat se note f'' (« f seconde ») et s'appelle la **dérivée seconde** de f. On dit alors que f est **deux fois dérivable**.

Par exemple, pour $f(x) = x^3 + 5x^2$:

$$f'(x) = 3x^2 + 10x$$

$$f''(x) = 6x + 10$$

ATTENTION · En calculant f'', le nombre devant reste devant

Quand $f'(x)$ s'écrit avec un nombre devant un bloc, ce nombre ne disparaît pas à la deuxième dérivation. Par exemple, si $f'(x) = 3(2x+1)^4$: le bloc $(2x+1)^4$ se dérive avec $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$, où $u(x) = 2x+1$, $u'(x) = 2$ et $n = 4$: on obtient $4 \times 2(2x+1)^3$, c'est-à-dire $8(2x+1)^3$, et le 3 reste devant :

$$f''(x) = 3 \times 8(2x+1)^3$$

$$f''(x) = 24(2x+1)^3$$

Oublier le 3 donnerait $8(2x+1)^3$: le signe serait le même, mais la valeur fausse.

À RETENIR · LES DEUX ÉQUIVALENCES À CONNAÎTRE

Si f est deux fois dérivable sur l'intervalle I :

f convexe sur $I \iff f'$ croissante sur $I \iff f''(x) \geq 0$ pour tout x de I.

f concave sur $I \iff f'$ décroissante sur $I \iff f''(x) \leq 0$ pour tout x de I.

Démonstration à savoir refaire : si $f'' \geq 0$ sur I, alors C_f est au-dessus de ses tangentes.

Soit a un réel de I. On compare la courbe et la tangente en a en étudiant leur différence :

$$g(x) = f(x) - \big[f'(a)(x-a) + f(a)\big]$$

1. On dérive : $f'(a)$ et $f(a)$ sont des nombres, donc

$$g'(x) = f'(x) - f'(a)$$

$$g''(x) = f''(x)$$

2. $g'' = f'' \geq 0$ sur I, donc g' est croissante sur I. Or $g'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$: g' est négative avant a et positive après.

3. Donc g est décroissante puis croissante : elle a un minimum en a, qui vaut $g(a) = f(a) - [0 + f(a)] = 0$.

4. Donc $g(x) \geq 0$ pour tout x de I : la courbe est au-dessus de la tangente en a. Comme a est quelconque, elle est au-dessus de toutes ses tangentes.

À RETENIR · TROIS FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

$x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$: sa dérivée seconde vaut 2, toujours positive.

$x \mapsto \mathrm{e}^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$: sa dérivée seconde est e^x, toujours positive.

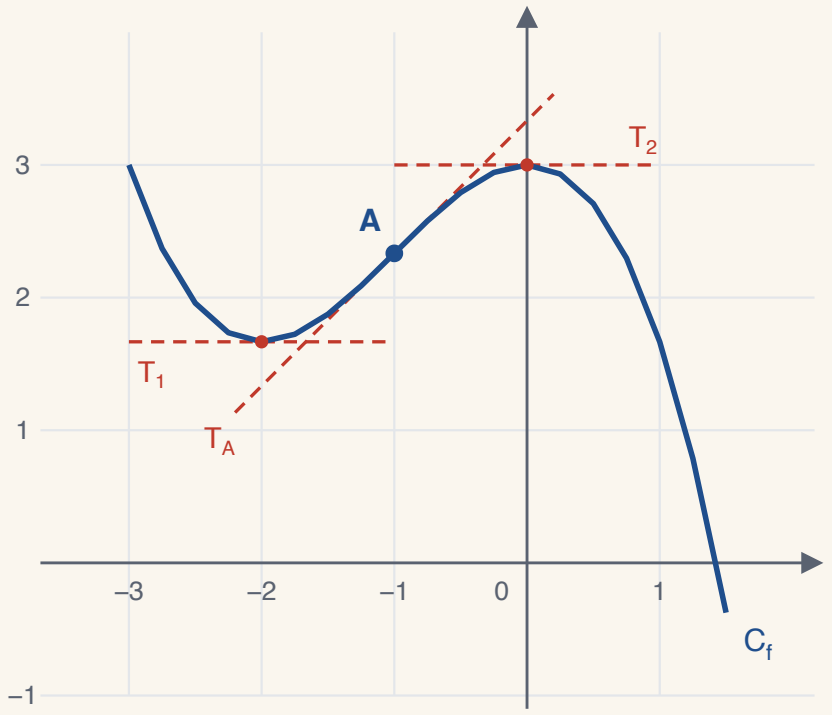
$x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $]0\,;+\infty[$: sa dérivée seconde est négative sur $]0\,;+\infty[$ (c'est le calcul de l'exercice 5).

En contrôle, on peut citer directement « la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ ».

Un point A de C_f, d'abscisse a, est un **point d'inflexion** si f change de convexité en a. Graphiquement, c'est le point où la courbe **traverse sa tangente**.

2. Lire la convexité sur la courbe de f

Sur la courbe de f, je découpe en morceaux : les morceaux en cuvette (au-dessus des tangentes) et les morceaux en dôme (en dessous des tangentes). Le point d'inflexion est à la frontière, là où la courbe traverse sa tangente. Une lecture graphique donne une conjecture : on écrit « f semble convexe ».



La courbe de f sur [−3 ; 1,5], avec trois tangentes en pointillés : T_1 au point d'abscisse −2, T_2 au point d'abscisse 0, et la tangente au point A d'abscisse −1.

Exemple. On lit la convexité de f sur la figure ci-dessus.

1. Sur $[-3\,;-1]$, la courbe est en cuvette : elle est au-dessus de sa tangente T_1. Donc f semble convexe sur $[-3\,;-1]$.

2. Sur $[-1\,;1{,}5]$, la courbe est en dôme : elle est en dessous de sa tangente T_2. Donc f semble concave sur $[-1\,;1{,}5]$.

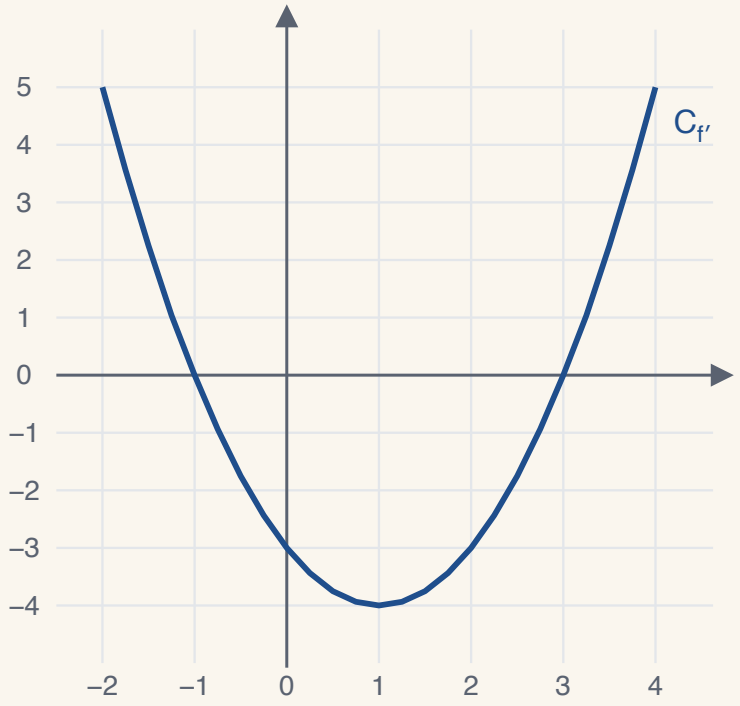
3. Au point A, la courbe traverse sa tangente T_A : au-dessus à gauche de A, en dessous à droite. A est un point d'inflexion. On lit $A(-1\,;\text{environ } 2{,}3)$.

La partie 4 confirme cette lecture par le calcul.

3. Lire la convexité sur la courbe de f'

On te donne la courbe de la dérivée f', pas celle de f. La convexité de f se lit sur les **variations** de f' : là où la courbe de f' monte, f est convexe ; là où elle descend, f est concave. Les abscisses où la courbe de f' change de sens (elle passe de la montée à la descente, ou l'inverse) donnent les points d'inflexion de C_f. Attention : la courbe de f' commence et s'arrête aux bornes de l'intervalle. Ces deux extrémités ne sont pas des changements de sens, donc pas des points d'inflexion.

Sur la même courbe, le **signe** de f' (courbe au-dessus ou en dessous de l'axe des abscisses) donne autre chose : les variations de f.



La courbe de la dérivée f' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur [−2 ; 4]. Ce n'est pas la courbe de f.

Exemple. On lit, sur la courbe de f' ci-dessus, les variations puis la convexité de f sur $[-2\,;4]$.

1. Le signe de f', pour les variations de f. La courbe de f' coupe l'axe des abscisses en $x=-1$ et en $x=3$. Elle est au-dessus de l'axe sur $[-2\,;-1]$, en dessous sur $[-1\,;3]$, au-dessus sur $[3\,;4]$. Donc f est croissante sur $[-2\,;-1]$, décroissante sur $[-1\,;3]$, croissante sur $[3\,;4]$.

2. Les variations de f', pour la convexité de f. La courbe de f' descend jusqu'à son point le plus bas, d'abscisse 1, puis remonte. f' est décroissante sur $[-2\,;1]$ et croissante sur $[1\,;4]$. Donc f est concave sur $[-2\,;1]$ et convexe sur $[1\,;4]$.

3. Le point d'inflexion. f change de convexité en $x=1$: C_f admet un point d'inflexion d'abscisse 1. Son ordonnée $f(1)$ ne se lit pas ici, puisqu'on n'a pas la courbe de f.

ATTENTION · Une ligne de tableau, un usage

Le signe de f' donne les variations de f. Les variations de f' donnent la convexité de f. Si tu fais un tableau, mets ces deux informations sur deux lignes séparées : dans un tableau mélangé, on ne sait plus laquelle a servi à conclure. Dans l'exemple ci-dessus, $f'(2)=-3$: f' est négative en $x=2$, et pourtant f y est convexe. Le signe de f' ne dit rien de la convexité.

4. Étudier la convexité avec le signe de f''

À RETENIR · LA MÉTHODE

1. Je calcule $f'(x)$, puis $f''(x)$.

2. J'étudie le signe de $f''(x)$ et je le mets dans un tableau de signes.

3. Je conclus : f est convexe là où $f''(x)\geq 0$, concave là où $f''(x)\leq 0$.

4. Les points d'inflexion sont aux abscisses a où f'' s'annule **en changeant de signe**. Leur ordonnée est $f(a)$.

Si on te donne directement **la courbe de f''** : là où elle est au-dessus de l'axe des abscisses, $f''\geq 0$ et f est convexe ; en dessous, f est concave. Les points d'inflexion sont là où elle traverse l'axe.

Comme f'' est la dérivée de f', son signe donne aussi les **variations de f'**. À l'abscisse d'un point d'inflexion, f' change de sens de variation : elle atteint un maximum local ou un minimum local.

Exemple. La courbe de la partie 2 est celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3$$

On étudie sa convexité par le calcul.

1. Les dérivées.

$$f'(x) = -\frac{1}{3} \times 3x^2 - 2x$$

$$f'(x) = -x^2 - 2x$$

$$f''(x) = -2x - 2$$

2. Le signe de $f''(x)$. On résout $f''(x) \geq 0$:

$$-2x - 2 \geq 0$$

$$-2x \geq 2$$

$$x \leq -1$$

(en divisant par -2, qui est négatif, on change le sens de l'inégalité). Donc $f''(x) \geq 0$ sur $]-\infty\,;-1]$ et $f''(x) \leq 0$ sur $[-1\,;+\infty[$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

3. Conclusion. f est convexe sur $]-\infty\,;-1]$ et concave sur $[-1\,;+\infty[$.

4. Le point d'inflexion. f'' s'annule en -1 en changeant de signe : C_f admet un point d'inflexion d'abscisse -1. Son ordonnée :

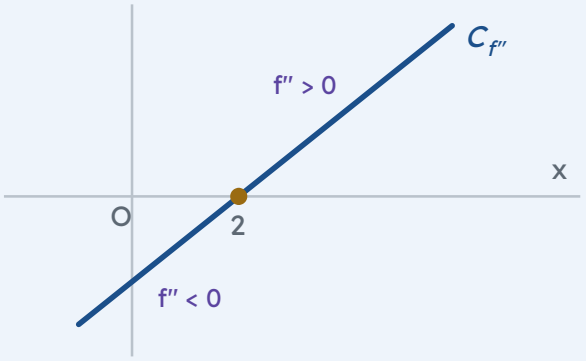
$$f(-1) = -\frac{1}{3} \times (-1)^3 - (-1)^2 + 3$$

$$f(-1) = \frac{1}{3} - 1 + 3$$

$$f(-1) = \frac{7}{3}$$

Le point d'inflexion est $A\left(-1\,;\frac{7}{3}\right)$, avec $\frac{7}{3} \approx 2{,}33$: c'est bien ce qu'on avait lu sur la figure.

Exemple avec la courbe de f''. On te donne directement la courbe de la dérivée seconde f'' d'une fonction f : une droite qui coupe l'axe des abscisses en $x = 2$.



1. Avant 2, la courbe de f'' est en dessous de l'axe : $f''(x) \leq 0$, donc f est concave sur $]-\infty\,;2]$.

2. Après 2, elle est au-dessus : $f''(x) \geq 0$, donc f est convexe sur $[2\,;+\infty[$.

3. f'' s'annule en 2 en changeant de signe : C_f a un point d'inflexion d'abscisse 2.

4. f'' est la dérivée de f', donc son signe donne les variations de f' : f' est décroissante sur $]-\infty\,;2]$ et croissante sur $[2\,;+\infty[$. f' admet un minimum local en 2, l'abscisse du point d'inflexion.

ATTENTION · $f''(a) = 0$ ne suffit pas

Pour avoir un point d'inflexion en a, il faut que f'' **change de signe** en a. S'annuler ne suffit pas.

Exemple : $f(x) = x^4$. On a $f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 12x^2$, donc $f''(0) = 0$. Mais $12x^2 \geq 0$ des deux côtés de 0 : f est convexe sur tout $\mathbb{R}$, sa courbe ne change pas de convexité en 0, il n'y a pas de point d'inflexion.

À RETENIR · ESQUISSER L'ALLURE D'UNE COURBE

On te donne le tableau de variations de f et le signe de f'' (ou les variations de f'). Morceau par morceau :

1. Le tableau de variations donne le **sens** : la courbe monte ou descend.

2. Le signe de f'' donne la **forme** : en cuvette (convexe) ou en dôme (concave).

3. Je place les points connus, le point d'inflexion là où f'' change de signe, et je relie en respectant le sens et la forme de chaque morceau.

Exemple. Une fonction f est définie sur $[-2\,;2]$, avec $f(-2)=-2$, $f(0)=3$ et $f(2)=2$. On donne :

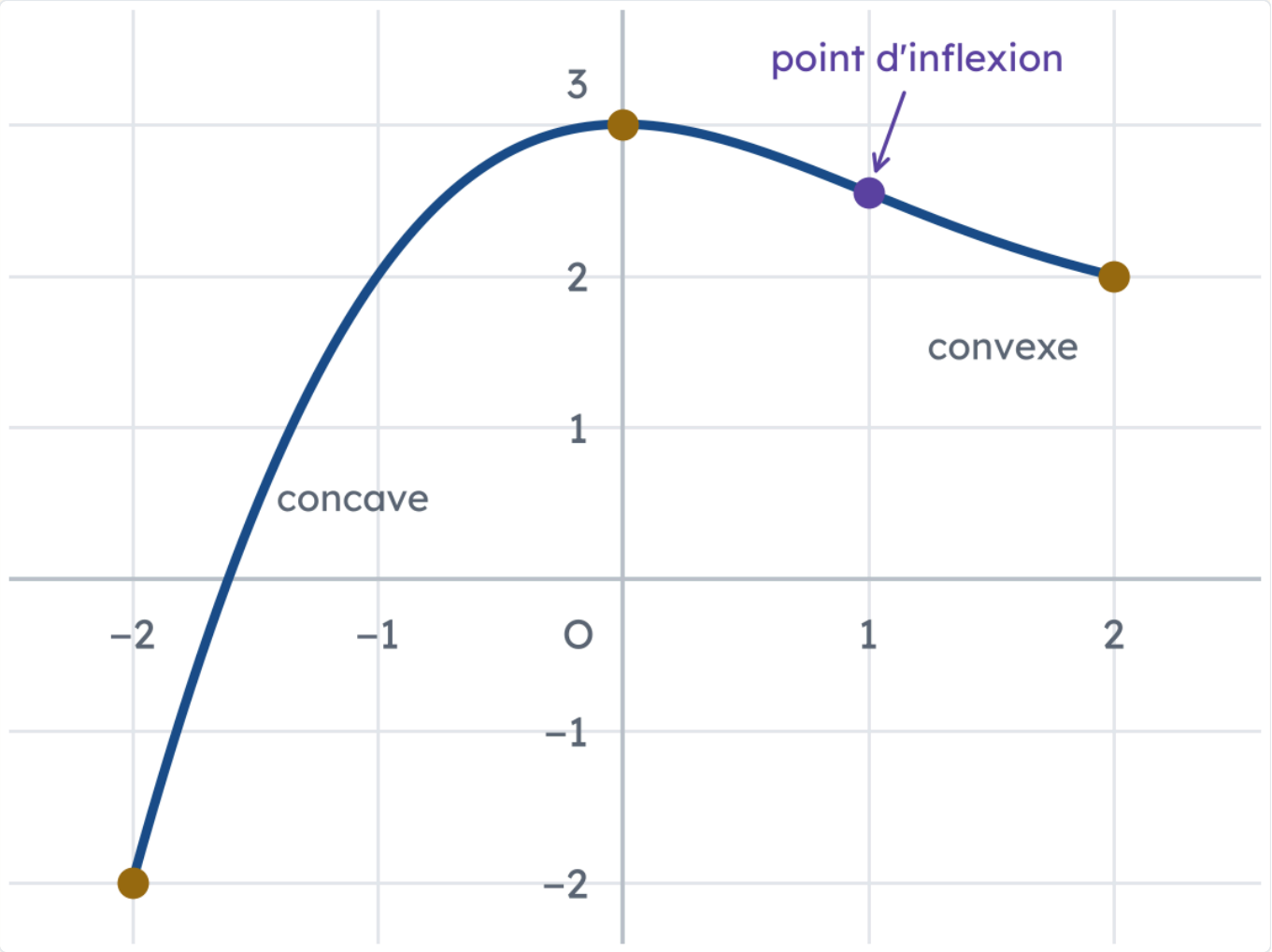
x	-2		0		2
f	-2	↗	3	↘	2

x	-2		1		2
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

1. Le sens. f monte de -2 à 3 sur $[-2\,;0]$, puis descend de 3 à 2 sur $[0\,;2]$.

2. La forme. $f''\leq 0$ sur $[-2\,;1]$: dôme. $f''\geq 0$ sur $[1\,;2]$: cuvette. Le point d'inflexion a pour abscisse 1.

3. Le tracé. La courbe monte en dôme jusqu'au sommet $(0\,;3)$, redescend encore en dôme jusqu'à $x=1$, puis finit en cuvette jusqu'à $(2\,;2)$, en descendant toujours. On ne connaît pas la pente en 2 : il ne faut rien inventer (pas de tangente horizontale imposée, par exemple). Ce n'est qu'une allure : on ne connaît pas toutes les valeurs, mais le sens et la forme de chaque morceau doivent être justes.



Une allure possible de la courbe de f.

5. Démontrer une inégalité avec une tangente

À RETENIR · LA RÈGLE

Rappel : la tangente à C_f au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Si f est **convexe** sur I, sa courbe est au-dessus de toutes ses tangentes. Donc, pour tout a et tout x de I :

$$f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$$

Si f est **concave** sur I, l'inégalité est dans l'autre sens : $f(x) \leq f'(a)(x - a) + f(a)$.

À RETENIR · LA MÉTHODE EN QUATRE ÉTAPES

1. Repérer le point a : c'est là que la droite de l'inégalité touche la courbe (les deux membres sont égaux).

2. Étudier la convexité de f sur l'intervalle, avec le signe de f''.

3. Écrire l'équation de la tangente au point d'abscisse a, et vérifier que c'est bien la droite de l'inégalité.

4. Conclure : convexe, la courbe est au-dessus de la tangente ; concave, en dessous.

Exemple. Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$\frac{1}{x} \geq 2 - x$$

On pose $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Le point a. On cherche où la droite $y = 2 - x$ touche la courbe, c'est-à-dire où les deux membres sont égaux. Pour $x > 0$:

$$\frac{1}{x} = 2 - x$$

On multiplie par x, qui n'est pas nul :

$$1 = 2x - x^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

On prend donc $a = 1$.

2. La convexité.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Pour $x > 0$, $x^3 > 0$, donc $f''(x) > 0$: f est convexe sur $]0\,;+\infty[$.

3. La tangente au point d'abscisse 1.

$$f(1) = 1$$

$$f'(1) = -1$$

La tangente a pour équation :

$$y = -1 \times (x - 1) + 1$$

$$y = -x + 2$$

4. Conclusion. f est convexe sur $]0\,;+\infty[$ et 1 appartient à cet intervalle : C_f est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1. Donc, pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{1}{x} \geq 2 - x$. L'égalité a lieu en $x = 1$, au point de contact.

Vérification avec $x = 2$: $\dfrac{1}{2} \geq 0$, c'est vrai.

ATTENTION · La règle ne vaut que sur un intervalle de même convexité

La courbe est au-dessus (ou en dessous) de sa tangente seulement sur un intervalle où f garde la même convexité. Au point d'inflexion, la courbe **traverse** sa tangente : d'un côté elle est au-dessus, de l'autre en dessous. C'est pour cela qu'une inégalité obtenue avec une tangente s'écrit toujours « pour tout x de tel intervalle ».

2 Exercices types

Cinq exercices : la convexité à partir des variations de f' (données en phrases, puis dans un tableau), un cas où f'' s'annule sans point d'inflexion, une étude complète avec une exponentielle et deux points d'inflexion, puis une inégalité dans le cas concave. Cherche-les avant de lire la correction.

Exercice 1 CONVEXITÉ À PARTIR DES VARIATIONS DE F'

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On ne connaît pas f, mais on sait ceci sur sa dérivée f' : f' est croissante sur $]-\infty\,;1]$, décroissante sur $[1\,;+\infty[$, et $f'(1)=2$.

1. Étudier la convexité de f.

2. C_f admet-elle un point d'inflexion ?

3. C_f est-elle au-dessus ou en dessous de sa tangente au point d'abscisse 3, sur $[1\,;+\infty[$?

4. Peut-on dire que f est croissante sur $[1\,;+\infty[$?

CORRECTION

1

f' est croissante sur $]-\infty\,;1]$, donc f est convexe sur $]-\infty\,;1]$. f' est décroissante sur $[1\,;+\infty[$, donc f est concave sur $[1\,;+\infty[$.

2

f change de convexité en 1 : C_f admet un point d'inflexion d'abscisse 1. On ne peut pas donner son ordonnée, car $f(1)$ n'est pas connue.

3

3 appartient à $[1\,;+\infty[$, où f est concave. Sur cet intervalle, C_f est en dessous de toutes ses tangentes, en particulier de sa tangente au point d'abscisse 3.

4

Non. Les variations de f se lisent sur le **signe** de f', et l'énoncé donne les **variations** de f'. Sur $[1\,;+\infty[$, f' part de 2 et diminue : elle peut rester positive, ou devenir négative à partir d'un certain moment. On ne peut pas conclure.

f convexe sur $]-\infty\,;1]$, concave sur $[1\,;+\infty[$; point d'inflexion d'abscisse 1 ; C_f en dessous de sa tangente en 3 ; on ne peut rien dire du sens de variation de f.

Exercice 2 CONVEXITÉ À PARTIR DU TABLEAU DE VARIATIONS DE F'

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On ne connaît pas f, mais on donne le tableau de variations de sa dérivée f' :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f'		$\searrow$	1	$\nearrow$	

1. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

2. Donner l'abscisse du point d'inflexion de C_f.

3. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

CORRECTION

1

Le tableau donne les variations de f'. f' est décroissante sur $]-\infty\,;-2]$, donc f est concave sur $]-\infty\,;-2]$. f' est croissante sur $[-2\,;+\infty[$, donc f est convexe sur $[-2\,;+\infty[$.

2

f change de convexité en -2 : C_f admet un point d'inflexion d'abscisse -2. Son ordonnée $f(-2)$ n'est pas connue.

3

Cette fois, le tableau donne aussi une valeur : le minimum de f' sur $\mathbb{R}$ est 1, atteint en -2. Donc, pour tout réel x :

$$f'(x) \geq 1$$

et $1 > 0$, donc $f'(x) > 0$ pour tout réel x : f est croissante sur $\mathbb{R}$. Dans l'exercice 1, on ne pouvait pas conclure, parce que rien ne disait que f' restait positive ; ici, c'est le minimum positif de f' qui permet de conclure.

f concave sur $]-\infty\,;-2]$, convexe sur $[-2\,;+\infty[$; point d'inflexion d'abscisse -2 ; f croissante sur $\mathbb{R}$, car $f'(x) \geq 1 > 0$.

Exercice 3 F'' S'ANNULE SANS CHANGER DE SIGNE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 1$$

1. Montrer que $f''(x) = 12(x-1)^2$.

2. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

3. On a $f''(1) = 0$. Le point de C_f d'abscisse 1 est-il un point d'inflexion ?

CORRECTION

1

On dérive deux fois :

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12$$

$$f''(x) = 12(x^2 - 2x + 1)$$

$$f''(x) = 12(x-1)^2$$

(identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 1$).

2

Un carré est positif ou nul, et $12 > 0$: $f''(x) \geq 0$ pour tout réel x :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$+$	

Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

3

f'' s'annule en 1, mais elle est positive avant et après 1 : elle ne change pas de signe. f reste convexe des deux côtés, il n'y a pas de changement de convexité en 1.

f est convexe sur $\mathbb{R}$; le point d'abscisse 1 n'est pas un point d'inflexion, et C_f n'en a aucun.

Exercice 4 ÉTUDE COMPLÈTE, DEUX POINTS D'INFLEXION

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

1. Calculer $f'(x)$.

2. Montrer que $f''(x) = (x^2 - 1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

3. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

4. Donner les coordonnées des points d'inflexion de C_f.

CORRECTION

1

f est de la forme e^u avec $u(x) = -\dfrac{x^2}{2}$, donc $u'(x) = -x$. Avec $(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$:

$$f'(x) = -x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

2

f' est un produit. On pose $p(x) = -x$ et $q(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, donc $p'(x) = -1$ et $q'(x) = -x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ (calculé à la question 1). Avec $(pq)' = p'q + q'p$:

$$f''(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + \left(-x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right) \times (-x)$$

$$f''(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f''(x) = (x^2 - 1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

3

Une exponentielle est toujours strictement positive : le signe de $f''(x)$ est celui de $x^2 - 1$. Ce trinôme a deux racines, -1 et 1, et le coefficient de x^2 est $1 > 0$: il est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. Donc $f''(x) \geq 0$ sur $]-\infty\,;-1]$ et sur $[1\,;+\infty[$, et $f''(x) \leq 0$ sur $[-1\,;1]$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

f est convexe sur $]-\infty\,;-1]$, concave sur $[-1\,;1]$, convexe sur $[1\,;+\infty[$.

4

f'' s'annule en changeant de signe en -1 et en 1 : deux points d'inflexion. Leurs ordonnées :

$$f(1) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(-1) = \mathrm{e}^{-\frac{(-1)^2}{2}}$$

$$f(-1) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

On les appelle B et D : $B\left(-1\,;\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$ et $D\left(1\,;\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$.

$f''(x) = (x^2-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$; f **convexe sur** $]-\infty\,;-1]$ **et sur** $[1\,;+\infty[$**, concave sur** $[-1\,;1]$; **points d'inflexion** $B\left(-1\,;\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$ **et** $D\left(1\,;\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$**, avec** $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}61$.

Exercice 5 INÉGALITÉ PAR TANGENTE, CAS CONCAVE

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Calculer $f'(x)$, puis montrer que $f''(x) = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$.

2. Étudier la convexité de f sur $]0\,;+\infty[$.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à C_f au point d'abscisse 4.

4. En déduire que, pour tout réel $x > 0$:

$$\sqrt{x} \leq \frac{x}{4} + 1$$

CORRECTION

1

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, que l'on écrit $f'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Le $\dfrac{1}{2}$ reste devant. On dérive $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ avec $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$, où $u(x) = \sqrt{x}$, $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $u(x)^2 = x$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

Donc :

$$f''(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

2

Pour $x > 0$, $x\sqrt{x} > 0$, donc $f''(x) < 0$: f est concave sur $]0\,;+\infty[$.

3

On calcule les deux nombres :

$$f(4) = \sqrt{4}$$

$$f(4) = 2$$

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}}$$

$$f'(4) = \frac{1}{4}$$

La tangente a pour équation :

$$y = \frac{1}{4}(x-4) + 2$$

$$y = \frac{x}{4} - 1 + 2$$

$$y = \frac{x}{4} + 1$$

4

f est concave sur $]0\,;+\infty[$ et 4 appartient à cet intervalle : C_f est en dessous de sa tangente (T). Donc, pour tout $x > 0$, $f(x) \leq \frac{x}{4} + 1$.

Vérification avec $x = 9$: $\sqrt{9} = 3$ et $\frac{9}{4} + 1 = 3{,}25$, on a bien $3 \leq 3{,}25$.

(T) : $y = \frac{x}{4} + 1$, **et** $\sqrt{x} \leq \frac{x}{4} + 1$ **pour tout** $x > 0$.

3 À toi de jouer

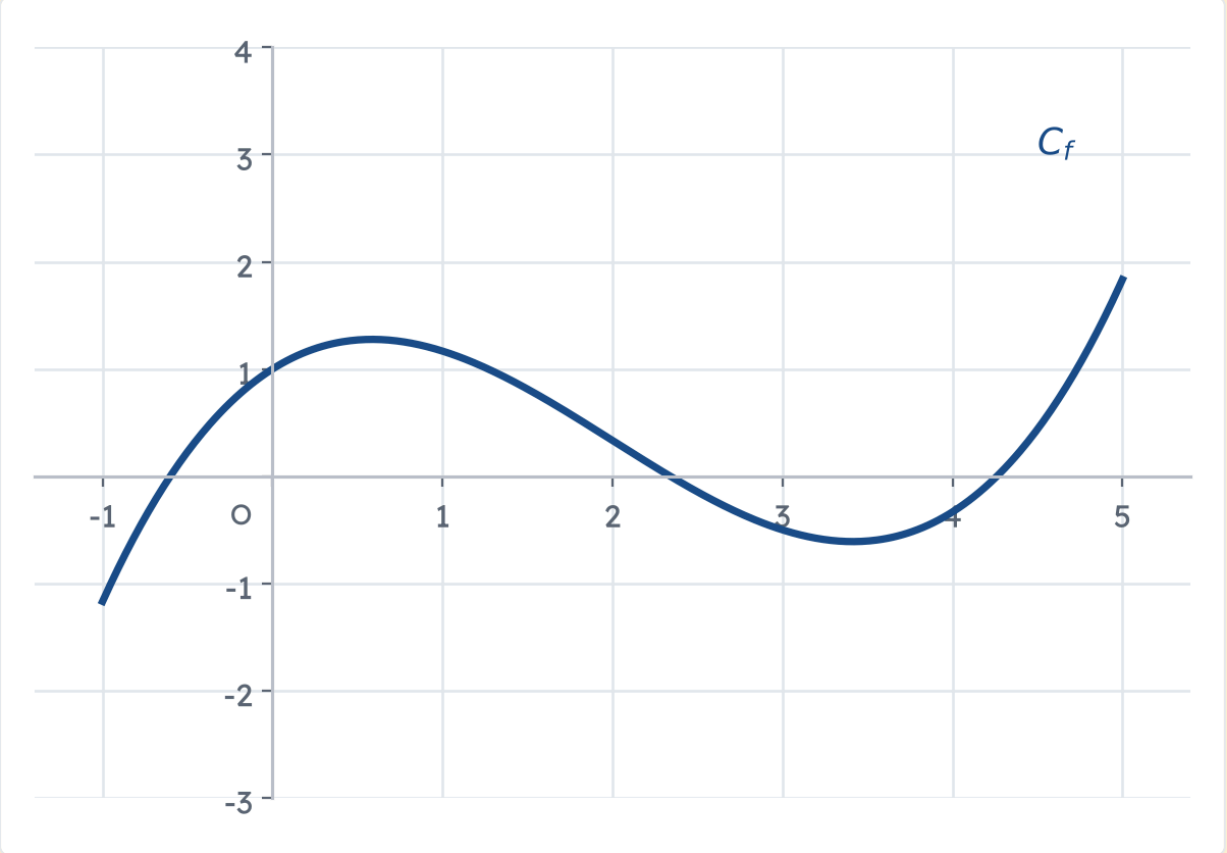
Cinq exercices : trois de lecture graphique (sur la courbe de f, de f', puis de f''), deux avec une fonction donnée. Cherche sans regarder les réponses, elles sont regroupées en fin de fiche.

Les réponses sont à la fin de la fiche, dans « Réponses des devoirs ». Cherche d'abord, vérifie ensuite.

1. **Lire la convexité sur la courbe de f.** Ci-dessous, la courbe C_f d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-1\,;5]$.
   a) Sur quel intervalle f semble-t-elle concave ? convexe ?

   b) Lire une valeur approchée de l'abscisse du point d'inflexion de C_f.

   c) En déduire le signe de $f''(x)$ sur chacun des deux intervalles.



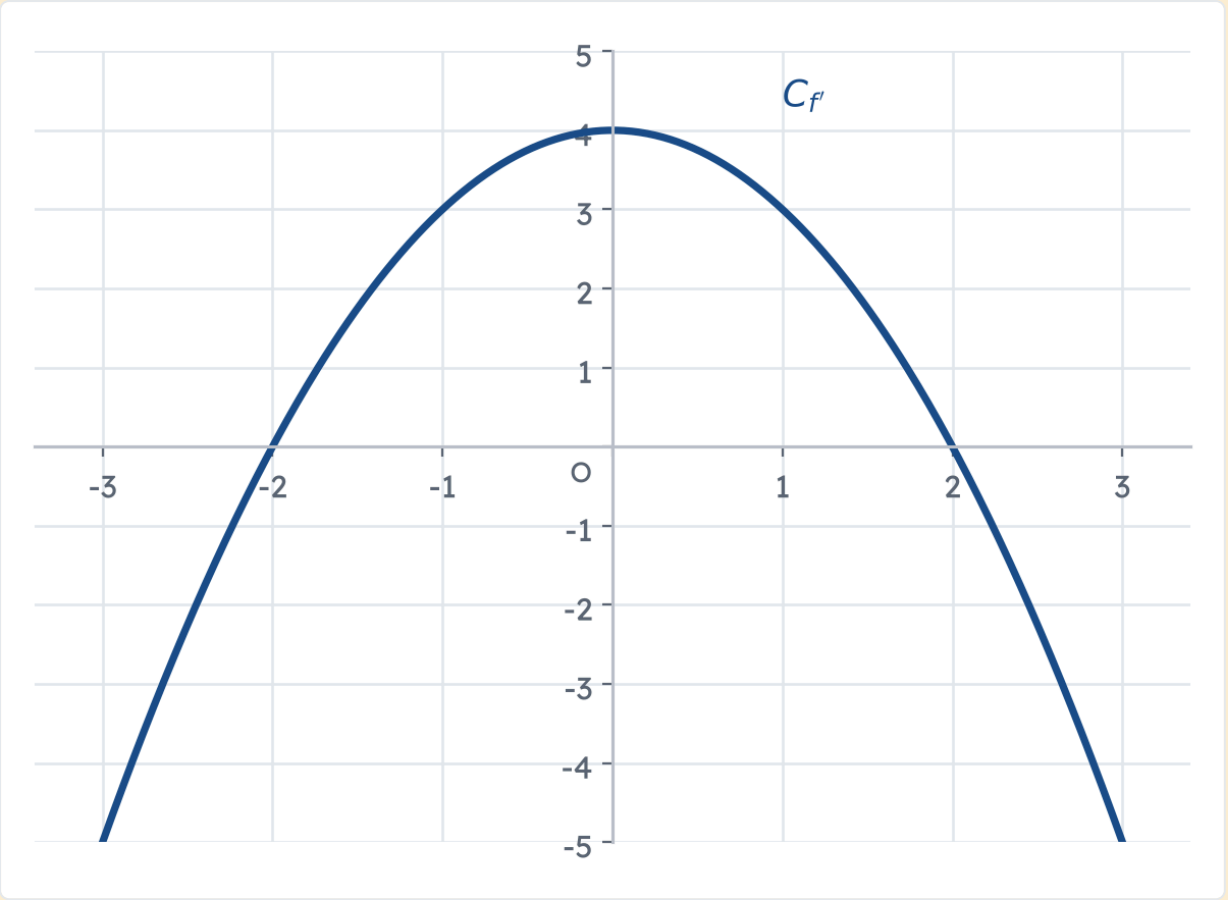
La courbe de f sur [−1 ; 5].

2. Lire sur la courbe de f'. Ci-dessous est tracée la courbe $C_{f'}$ de la dérivée f' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-3\,;3]$. Attention : c'est la courbe de f', pas celle de f.

a) Lire le signe de $f'(x)$, puis donner les variations de f.

b) Lire les variations de f', puis donner la convexité de f.

c) C_f admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, donner son abscisse.



La courbe de la dérivée f', sur [−3 ; 3].

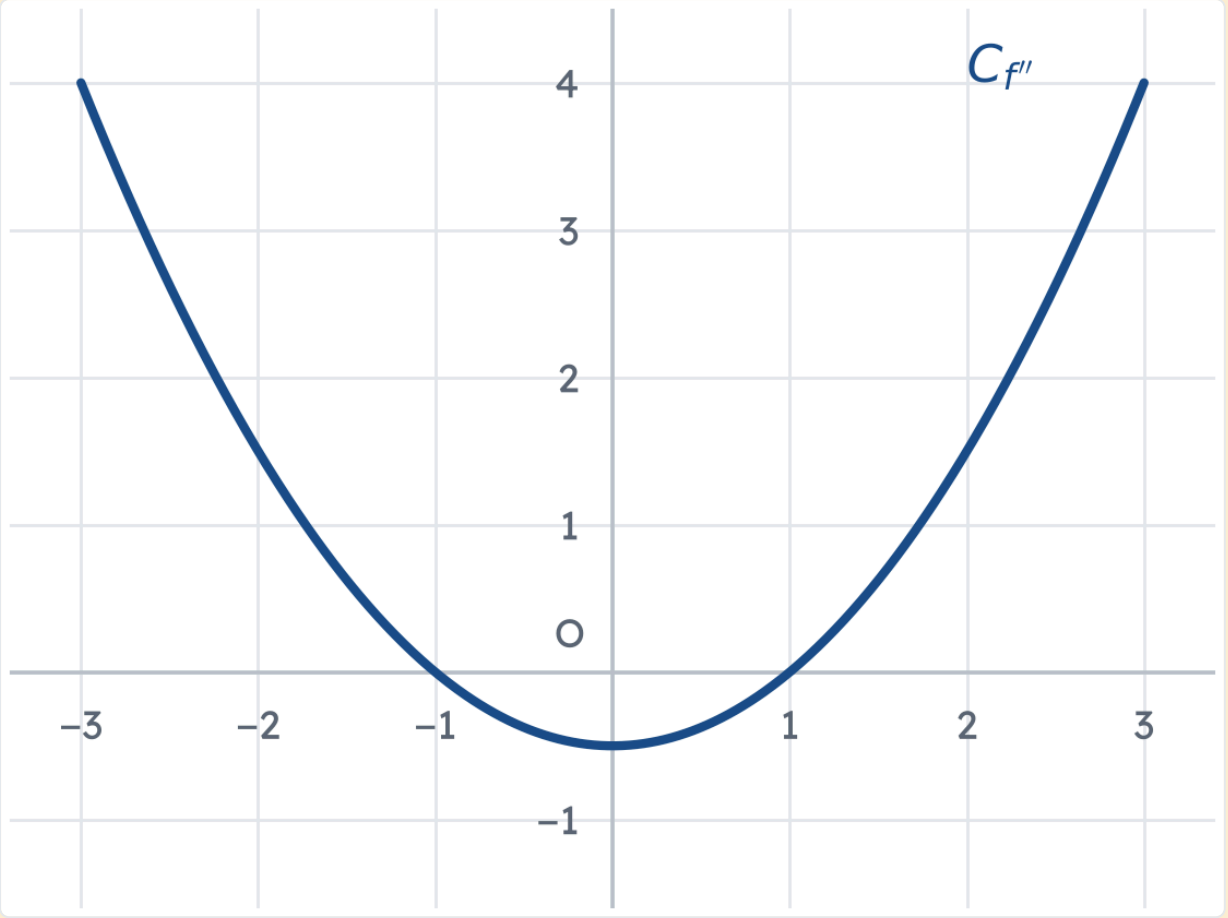
3. Lire sur la courbe de f''. Ci-dessous est tracée la courbe $C_{f''}$ de la dérivée seconde f'' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-3\,;3]$. Attention : c'est la courbe de f'', ni celle de f, ni celle de f'.

a) Sur quels intervalles f est-elle convexe ? concave ?

b) Donner les abscisses des points d'inflexion de C_f.

c) Donner les variations de f' sur $[-3\,;3]$.

d) f' admet-elle des extremums ? Préciser leur nature et leur abscisse.



La courbe de la dérivée seconde f'', sur [−3 ; 3].

4. Une fonction polynôme. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = -x^3 + 6x^2 - 5$$

a) Calculer $h'(x)$ puis $h''(x)$.

b) Étudier la convexité de h et donner les coordonnées de son point d'inflexion J.

c) Déterminer une équation de la tangente (T) à C_h au point J.

d) Étudier les variations de h sur $[0\,;4]$, puis esquisser l'allure de C_h sur cet intervalle.

5. Une exponentielle, et une inégalité. Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = (2 - x)\,\mathrm{e}^{x}$$

a) Montrer que $k'(x) = (1 - x)\,\mathrm{e}^{x}$, puis calculer $k''(x)$.

b) Étudier la convexité de k et préciser le point d'inflexion.

c) Déterminer une équation de la tangente (T) à C_k au point d'abscisse 0.

d) En déduire que, pour tout réel $x \geq 0$:

$$(2 - x)\,\mathrm{e}^{x} \leq x + 2$$

Réponses des devoirs

À ne regarder qu'après avoir cherché, et à comparer avec ta rédaction : la réponse seule ne suffit pas en contrôle, c'est la justification qui compte.

Réponses des exercices de « À toi de jouer ».

1. a) La courbe est en dôme (concave) au début, puis en cuvette (convexe) : concave sur environ $[-1\,;2]$, convexe sur environ $[2\,;5]$. b) Environ 2 : c'est là que la courbe passe du dôme à la cuvette. c) $f''(x) \leq 0$ sur environ $[-1\,;2]$ et $f''(x) \geq 0$ sur environ $[2\,;5]$.

2. a) $C_{f'}$ coupe l'axe des abscisses en $x = -2$ et $x = 2$. $f'(x) \leq 0$ sur $[-3\,;-2]$, $f'(x) \geq 0$ sur $[-2\,;2]$, $f'(x) \leq 0$ sur $[2\,;3]$: f est décroissante, puis croissante, puis décroissante. b) f' est croissante sur $[-3\,;0]$ (jusqu'au sommet) puis décroissante sur $[0\,;3]$: f est convexe sur $[-3\,;0]$, concave sur $[0\,;3]$. c) Oui : f change de convexité en $x = 0$, abscisse du point d'inflexion.

3. a) $C_{f''}$ coupe l'axe des abscisses en $x = -1$ et $x = 1$. Elle est au-dessus de l'axe sur $[-3\,;-1]$ et sur $[1\,;3]$: $f''(x) \geq 0$, donc f est convexe sur $[-3\,;-1]$ et sur $[1\,;3]$. Elle est en dessous de l'axe sur $[-1\,;1]$: $f''(x) \leq 0$, donc f est concave sur $[-1\,;1]$. b) f'' s'annule en changeant de signe en -1 et en 1 : C_f a deux points d'inflexion, d'abscisses -1 et 1. Le point le plus bas de $C_{f''}$, en $x = 0$, ne joue aucun rôle ici : en 0, f'' est négative, elle ne change pas de signe. c) f'' est la dérivée de f' : f' est croissante sur $[-3\,;-1]$, décroissante sur $[-1\,;1]$, croissante sur $[1\,;3]$. d) Oui : en -1, f' passe de croissante à décroissante, elle admet un maximum local en -1. En 1, f' passe de décroissante à croissante, elle admet un minimum local en 1. On dit « local » parce qu'on compare seulement avec les valeurs proches : on ne connaît aucune valeur de f', et comme f' remonte sur $[1\,;3]$, elle peut y dépasser $f'(-1)$; de même, $f'(-3)$ peut être plus petit que $f'(1)$.

4. a) $h'(x) = -3x^2 + 12x$ et $h''(x) = -6x + 12$. b) $-6x + 12 \geq 0$ pour $x \leq 2$: h est convexe sur $]-\infty\,;2]$ et concave sur $[2\,;+\infty[$. $h(2) = -8 + 24 - 5$, soit $h(2) = 11$: $J(2\,;11)$. c) $h'(2) = -12 + 24$, soit $h'(2) = 12$. (T) : $y = 12(x-2) + 11$, soit $y = 12x - 13$. d) $h'(x) = -3x(x-4)$ est positive sur $[0\,;4]$: h est croissante, de $h(0) = -5$ à $h(4) = 27$. La courbe part de $(0\,;-5)$ avec une tangente horizontale ($h'(0) = 0$), monte en cuvette jusqu'au point d'inflexion $J(2\,;11)$, puis continue de monter en dôme jusqu'à $(4\,;27)$, où la tangente est de nouveau horizontale ($h'(4) = 0$).

5. a) $k'(x) = -1 \times \mathrm{e}^x + (2-x)\,\mathrm{e}^x$, soit $k'(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^x$. Puis $k''(x) = -\mathrm{e}^x + (1-x)\,\mathrm{e}^x$, soit $k''(x) = -x\,\mathrm{e}^x$. b) $\mathrm{e}^x > 0$, donc $k''(x)$ a le signe de $-x$: k est convexe sur $]-\infty\,;0]$, concave sur $[0\,;+\infty[$. Point d'inflexion d'abscisse 0, d'ordonnée $k(0) = 2$. c) $k(0) = 2$ et $k'(0) = 1$, donc (T) : $y = x + 2$. d) Sur $[0\,;+\infty[$, k est concave : sa courbe est en dessous de ses tangentes, en particulier de (T), tangente au point d'abscisse 0 de cet intervalle. Donc pour tout $x \geq 0$, $(2-x)\,\mathrm{e}^x \leq x + 2$. Attention : 0 est le point d'inflexion. Pour $x \leq 0$, k est convexe et la courbe passe au-dessus de (T) : c'est pour cela que l'inégalité n'est vraie que pour $x \geq 0$.